江苏省金陵科技著作出版基金 

鞅测度及其极限定理

江苏科学技术出版社


ISBN 7-5345-2060-6
9 787534 520600 >



江苏省金陵科技著作出版基金 

鞅测度及其极限定理

谢颖超 著

江苏科学技术出版社

鞅测度及其极限定理

谢颖超　著

出版发行：江 苏 科 学 技 术 出 版 社
排　　版：南京理工大学激光照排公司
印　　刷：扬　中　市　印　刷　厂

开本 850×1168 毫米 1/32 印张 11 插页 5 字数 266,000
1995 年 12 月第 1 版　1995 年 12 月第 1 次印刷
印数 1—600 册

ISBN　7－5345－2060－6

O·111　　　　定价：19.00 元
责任编辑　沈绍绪
我社图书如有印装质量问题，可随时向承印厂调换

致读者

社会主义的根本任务是发展生产力，而社会生产力的发展必须依靠科学技术。当今世界已进入新科技革命的时代，科学技术的进步不仅是世界经济发展、社会进步和国家富强的决定因素，也是实现我国社会主义现代化的关键。

科技出版工作肩负着促进科技进步，推动科学技术转化为生产力的历史使命。为了更好地贯彻党中央提出的"把经济建设转到依靠科技进步和提高劳动者素质的轨道上来"的战略决策，进一步落实中共江苏省委、江苏省人民政府作出的"科技兴省"的决定，江苏科学技术出版社于1988年倡议筹建江苏省科技著作出版基金。在江苏省人民政府、省委宣传部、省科委、省新闻出版局负责同志和有关单位的大力支持下，经省政府批准，由省科学技术委员会、省出版总社和江苏科学技术出版社共同筹集，于1990年正式建立了"江苏省金陵科技著作出版基金"，用作支持自然科学范围内符合条件的优秀科技著作的出版补助。

我们希望江苏省金陵科技著作出版基金的建立，能为优秀科技著作在江苏省及时出版创造条件，以通过出版工作这一"中介"，充分发挥科学技术作为第一生产力的作用，更好地为我国社会主义现代化建设和"科技兴省"服务；并能带动我省科技图书提高质量，促进科技出版事业的发展和繁荣。

建立出版基金是社会主义出版工作在改革中出现的新生事物，期待得到各方面的热情扶持，在实践中不断总结经验，使它逐步壮大和完善，更希望通过多种途径扩大这一基金，以支持更多优秀科技著作的出版。

这次获得江苏省金陵科技著作出版基金补助出版的科技著作的顺利问世，还得到江苏联合信托投资公司的赞助和参加评审工作的教授、专家的大力支持，特此表示衷心的感谢！

江苏省金陵科技著作出版基金管理委员会

前　言

随机过程极限定理的研究是近代概率论的一个重要分支．自1956年Yu. V. Prokhorov和A. V. Skorokhod发表了他们的著名论文[32]和[33]后，随机过程极限定理的研究得到了飞速发展．20世纪70年代至80年代，半鞅理论和随机分析的兴起，给这一理论注入了崭新的内容和研究方法，这一时期的成果已总结在由J. Jacod和A. N. Shiryeav合著的《Limit Theorems for Stochastic Processes》(1987)一书中．

1986年，J. B. Walsh在研究随机偏微分方程时，提出了鞅测度的概念，并研究了鞅测度的基本性质和随机积分．1990年，N. El Karoui和S. Méleard发表了关于鞅测度的第二篇论文，他们主要研究正交鞅测度的表现定理和鞅问题．1991年，D. H. Thang引入了向量值随机测度序列弱收敛的概念，并对对称独立散射的向量值随机测度的极限定理进行了研究．因为鞅测度既有鞅的性质，又有向量值随机测度的性质，如何定义和研究鞅测度的极限定理是自然要提出的问题，本书的讨论将围绕这一问题展开．本书作者在导师何声武教授的指导下，定义了鞅测度的极限，并对鞅测度的性质及其极限定理进行了深入、系统地研究，本书就是在作者博士学位论文的基础上进一步整理而成的．全书比较系统地介绍了鞅测度及其极限定理的国内外最新研究成果，希望能有助于更多的概率论工作者开展对随机过程极限定理这一有意义课题的研究和应用，以促进这一理论的进一步发展．

阅读本书需要具备以下基础知识：S. W. He、J. G. Wang和J. A. Yan[13](1992)以及M. Métivier[25](1982)等专著中有关半

鞅理论和随机分析的内容;J. Jacod 和 A. N. Shiryeav[16](1987)中有关半鞅的极限定理等基本知识;Hilbert 空间上线性算子的基本知识.

本书按照所涉及随机过程的不同类型,共分为五个部分。第一部分绪论,集中叙述本书中要用到的预备知识.第二部分介绍 Hilbert 空间值半鞅的极限定理这方面的成果,即取值于 Hilbert 空间的右连左极函数空间上关于 Skorokhod 拓扑为相对紧子集的结构定理——这是研究 Hilbert 空间值随机过程极限定理的基石,右连左极 Hilbert 空间值半鞅序列的胎紧性以及半鞅的极限定理.第三部分随机测度的极限定理,主要研究整值随机测度的极限定理.第四部分介绍实值鞅测度的性质及其极限定理,最后研究 Hilbert 空间值鞅测度的基本性质和极限定理,把 Hilbert 空间值鞅的性质及实值鞅测度的理论拓广到 Hilbert 空间值鞅测度上.

在本书的写作过程中,作者始终得到导师何声武教授的大力支持和热情鼓励,没有他的指导、关心和帮助,作者是不可能顺利地完成学业和写成此书的,可以说作者一切工作都凝聚着何先生的心血,其中的感激之情无法用语言来表达.同时,作者深切感谢汪振鹏教授,他的鼓励和帮助,使作者在学习和研究过程中得到了巨大的精神上的宽慰和奋发拼搏的动力.作者还要感谢汪嘉冈教授,他审阅并指出了作者博士学位论文中的错误.同时,作者还想把一片感激之情献给妻子陈彬硕士,作为伴侣、同事和同行,她对作者的工作和生活倾注了极大的心力.她含辛茹苦地抚养幼女、操持家务,单薄的肩头挑起了工作和生活两副重担.没有她的帮助、鼓励和促进,作者是无法安心完成学业和写成此书的.

作者能有勇气整理、完成此书,与徐州师范学院副院长周明儒教授的热忱鼓励、支持和帮助是分不开的,南京大学钟瑚绵副教授、南京航空航天大学王月珍副教授对完成此书及出版工作给予了极大的帮助,在此作者向他们表示最真诚的谢意.多年来,徐州

师范学院和数学系的领导和老师们，对作者及家庭给予了很多的关心和帮助，许多朋友给了热情的帮助和支持，在此一并向他们表示衷心的感谢.

由于作者水平有限，书中肯定会有错误和不当之处，敬请读者批评指正.

谢颖超

1995 年 7 月

目　录

1 预备知识

阅读本书的读者，须预先掌握 S. W. He、J. G. Wang 和 J. A. Yan[13]中随机分析的内容、J. Jacod 和 A. N. Shiryaev[16]中半鞅极限定理的基本知识，以及 Hilbert 空间上线性算子的基本知识. 本章主要取材于[13,16,25,40,42].

1.1 随机测度

1.1.1. 定义 设$(\Omega,\mathscr{F},\mathscr{F}_t,P)$是带流的完备概率空间，$(E,\mathscr{E})$是可测空间. 令

$$(\widetilde{\Omega},\widetilde{\mathscr{F}})=(\Omega\times \boldsymbol{R}_+\times \boldsymbol{E},\mathscr{F}\times\mathscr{B}(\boldsymbol{R}_+)\times\mathscr{E}),$$

$$\widetilde{\mathscr{O}}=\mathscr{O}\times\mathscr{E},\quad \widetilde{\mathscr{P}}=\mathscr{P}\times\mathscr{E},$$

其中$\mathscr{O}$和$\mathscr{P}$分别是$(\mathscr{F}_t)_{t\geq 0}$的可选$\sigma$-域和可料$\sigma$-域；称$\widetilde{\mathscr{O}}$和$\widetilde{\mathscr{P}}$分别是$\widetilde{\Omega}$上的可选和可料$\sigma$-域；定义在$\widetilde{\Omega}$上的$\widetilde{\mathscr{O}}$$(\widetilde{\mathscr{P}})$-可测函数称为$\widetilde{\Omega}$上的可选(可料)过程.

假设$(\boldsymbol{E},\mathscr{E})$是Lusin空间，即紧距离空间的Borel子集带上它的Borel σ-域. 例如$(\boldsymbol{E},\mathscr{E})$可以是一离散空间、$(\boldsymbol{R},\mathscr{B}(\boldsymbol{R}))$或者$n$-维欧氏空间$(\boldsymbol{R}^n,\mathscr{B}(\boldsymbol{R}^n))$.

1.1.2 引理 设W是$\widetilde{\Omega}$上的可选(可料)过程，$(\alpha_t)_{t\geq 0}$是可选(可料)过程，T是停时，则

$$W(\omega,T,\alpha_T(\omega))I_{\{T<\infty\}}(\omega)\in\mathscr{F}_T\quad(\mathscr{F}_{T-}).\tag{1.1}$$

证明　当$W(\omega,t,x)=f(\omega,t)g(x)$，$f(\omega,t)\in\mathscr{O}(\mathscr{P})$，$g\in\mathscr{E}$时，易知(1.1)成立. 利用单调类定理容易证明对任意的可选(可料)的W，(1.1)仍然成立. 证毕.

1.1.3 定义 定义在$\Omega\times\mathscr{B}(\boldsymbol{R}_+)\times\mathscr{E}$上的广义实值函数$\mu$称为是随机测度，如果

(Ⅰ)对任意的$\omega\in\Omega$，$\mu(\omega,\cdot)$是$\mathscr{B}(\boldsymbol{R}_+)\times\mathscr{E}$上$\sigma$-有限测度；

(Ⅱ)对任意的$\hat{B}\in\mathscr{B}(\boldsymbol{R}_+)\times\mathscr{E}$，$\mu(\cdot,\hat{B})$是$(\Omega,\mathscr{F})$上的$r.v.$

对任意的$\widetilde{B}\in\widetilde{\mathscr{F}}$，定义

$$M_\mu(\widetilde{B})=E\left[\int_{\boldsymbol{R}_+\times\boldsymbol{E}}I_{\widetilde{B}}(\omega,t,x)\mu(\omega,\mathrm{d}t,\mathrm{d}x)\right],$$

则M_μ是$(\widetilde{\Omega},\widetilde{\mathscr{F}})$上的测度，称之为由$\mu$生成的测度. 如果$M_\mu$有限，即$M_\mu(\widetilde{\Omega})<\infty$，则称$\mu$是可积的. 如果$M_\mu$限制在$\widetilde{\mathscr{O}}$或$\widetilde{\mathscr{P}}$上是$\sigma$-有限测度，则称$\mu$是可选$\sigma$-可积或可料$\sigma$-可积.

显然，随机测度的概念是增过程概念的推广. 设A是增过程，取$\boldsymbol{E}=\{x_0\}$为单点集，$\mathscr{E}=\{\varnothing,\boldsymbol{E}\}$，则

$$\mu(\omega,\mathrm{d}t,\mathrm{d}x)=\mathrm{d}A_t(\omega)\delta_{x_0}(\mathrm{d}x)$$

是一个随机测度，并且

$$\mu([0,t]\times\boldsymbol{E})=A_t.$$

应该强调的是对一般的随机测度μ，对任意的$t\geqslant 0$，$B\in\mathscr{E}$，$\mu([0,t]\times B)$可能是恒为∞.

如果$W\in\widetilde{\mathscr{F}}^+$，则

$$v(\omega,\hat{B}) = \int_{\hat{B}} W(\omega,t,x)\mu(\omega,\mathrm{d}t,\mathrm{d}x), \quad \hat{B} \in \mathscr{B}(\boldsymbol{R}_+) \times \mathscr{E} \tag{1.2}$$

仍为随机测度. 有时(1.2) 被记为 $v = W.\mu$ 或 $v = W\mu$.

对 $W \in \widetilde{\mathscr{P}}$, 如果

$$\int_{[0,t]\times E} |W| \mathrm{d}\mu < \infty, \quad \forall\ t > 0,$$

则定义 $W.\mu = (W.\mu_t)_{t\geq 0}$ 为

$$W.\mu_t = \int_{[0,t]\times E} W \mathrm{d}\mu, \quad t \geqslant 0.$$

显然 $W.\mu$ 是有限变差过程.

随机测度 μ 称为是可选的(可料的),如果对任意使得 $W.\mu$ 存在的可选(可料) 过程 W, $W.\mu$ 仍是可选(可料) 过程.

显然,如果对任意的 $t \geqslant 0$, $1.\mu_t < \infty$, 则 μ 是可选(可料) 的充要条件是对任意的 $B \in \mathscr{E}$, $I_B.\mu = (\mu([0,t] \times B))_{t\geqslant 0}$ 是可选(可料). 容易推得下面的结论.

1.1.4 引理 设 μ 是可选(可料) 随机测度, W 是非负可选(可料) 过程, 则 $v = W\mu$ 是可选(可料) 随机测度.

1.1.5 定理 设 μ 和 v 是两个可选(可料)σ- 可积的可选(可料) 随机测度. 如果在 $\widetilde{\mathscr{O}}$ $(\widetilde{\mathscr{P}})$ 上 M_μ 和 M_v 相同, 则 $\mu = v$, 即 μ 和 v 无区别:

$$P(\{\omega: \exists\ \hat{B} \in \mathscr{B}(\boldsymbol{R}_+) \times \mathscr{E} \text{ 使得 } \mu(\omega,\hat{B}) \neq v(\omega,\hat{B})\}) = 0.$$

证明 设 $\widetilde{A}_n \in \widetilde{\mathscr{O}}$ $(\widetilde{\mathscr{P}})$, 使得 $\widetilde{A}_n \uparrow \widetilde{\Omega}$, 并且

$$M_\mu(\widetilde{A}_n) = M_v(\widetilde{A}_n) < \infty, \quad \forall\ n \geqslant 1.$$

令 $\mathscr{D}$ 是一可数 П- 系, 使得 $\sigma(\mathscr{D}) = \mathscr{E}$. 对每个 $n \geqslant 1$, $D \in \mathscr{D}$, 定义

$$U = (I_{\widetilde{A}_n} I_D).\mu, \qquad V = (I_{\widetilde{A}_n} I_D).v,$$

则 U 和 V 均为可选(可料) 的可积增过程. 从而对任一非负可选(可料) 过程 H, 我们有

$$E\left[\int_{R_+} H_t \mathrm{d}U_t\right] = M_\mu[I_{\tilde{A}_n} I_D H] = M_\upsilon(I_{\tilde{A}_n} I_D H)$$

$$= E\left[\int_{R_+} H_t \mathrm{d}V_t\right].$$

因此 U 和 V 无区别. 所以

$$P\left(\left\{\omega: \int_{[0,t]\times D} I_{\tilde{A}_n} \mathrm{d}\mu = \int_{[0,t]\times D} I_{\tilde{A}_n} \mathrm{d}\upsilon, \forall\ t \geqslant 0, \forall\ D \in \mathscr{D}\right\}\right)$$

$$= 1.$$

由测度扩张的唯一性可得

$$P\left(\left\{\omega: \int_{\hat{B}} I_{\tilde{A}_n} \mathrm{d}\mu = \int_{\hat{B}} I_{\tilde{A}_n} \mathrm{d}\upsilon, \forall\ \hat{B} \in \mathscr{B}(\boldsymbol{R}_+) \times \mathscr{E}\right\}\right) = 1. \tag{1.3}$$

在(1.3) 中令 $n \to \infty$, 即得 $\mu = \upsilon$. 证毕.

1.1.6 定理 设 m 是$(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathscr{F}})$上的测度, 并且限制在 $\tilde{\mathscr{O}}$ $(\tilde{\mathscr{P}})$ 上是 σ- 有限, 则存在一可选(可料) 随机测度 μ 使得 $m = M_\mu$ 的充要条件是:

(Ⅰ) 对每个不足道集 $N \subset \Omega \times \boldsymbol{R}_+$, $m(N \times \boldsymbol{E}) = 0$;

(Ⅱ) 对任意使得 $m(\tilde{A}) < \infty$ 的集 $\tilde{A} \in \tilde{\mathscr{O}}$ $(\tilde{\mathscr{P}})$ 及任意有界可测过程 X,

$$m(XI_{\tilde{A}}) = m({}^oXI_{\tilde{A}})\ (m(XI_{\tilde{A}}) = m({}^pXI_{\tilde{A}})),$$

其中 ${}^oX$ 和 ${}^pX$ 分别表示 X 的可选和可料投影. 在这种情况下, 可选(可料) 随机测度是唯一确定的.

证明 我们只讨论可料情形.

必要性 (Ⅰ) 是显然的, 即对任意的不足道集 N, $M_\mu(N \times \boldsymbol{E}) = 0$. 注意到 $Y = I_{\tilde{A}}.\mu$ 是可料增过程, 从而对任意有界可测过程 X, 我们有

$$m(XI_{\tilde{A}}) = M_\mu(XI_{\tilde{A}}) = E\left[\int_{R_+} X_t \mathrm{d}Y_t\right] = E\left[\int_{R_+} {}^pX_t \mathrm{d}Y_t\right]$$

$$= M_\mu({}^pXI_{\tilde{A}}) = m({}^pXI_{\tilde{A}}).$$

充分性　首先假设 m 是有限测度，则 m 可分解为

$$m(\mathrm{d}\omega,\mathrm{d}t,\mathrm{d}x) = n(\omega,t,\mathrm{d}x)m(\mathrm{d}\omega,\mathrm{d}t,\boldsymbol{E}), \tag{1.4}$$

其中对任意的 $B \in \mathscr{E}$，$n(\omega,t,B)$ 是 $m(\mathrm{d}\omega,\mathrm{d}t,B)$ 在$\mathscr{P}$上关于 $m(\mathrm{d}\omega,\mathrm{d}t,\boldsymbol{E})$ 的 Radon-Nikodym 导数，并且也是一个可料过程；对任意的(ω,t)，$n(\omega,t,\cdot)$ 是 $\mathscr{E}$ 上的概率测度.

因为 m 有限，所以由假设条件(Ⅰ)知对任意 $t \geqslant 0$，$(\Omega,\mathscr{F})$ 上的集函数

$$Q_t(F) = m(F \times [0,t] \times \boldsymbol{E}), \quad F \in \mathscr{F}$$

是有限的，并且关于 P 绝对连续. 因此存在唯一的可积增过程 $A = (A_t)_{t\geqslant 0}$，使得对任意非负可测过程 X，

$$m(X) = E\left[\int_{\boldsymbol{R}_+} X_t \mathrm{d}A_t\right]. \tag{1.5}$$

由条件(Ⅱ)知 m 可料，从而 A 是可料增过程. 令

$$\mu(\omega,\mathrm{d}t,\mathrm{d}x) = n(\omega,t,\mathrm{d}x)\mathrm{d}A_t(\omega),$$

容易验证 μ 是可料可积的随机测度.

对任意的 $B \in \mathscr{E}$ 和任意有界可测过程 X，由(1.4)和(1.5)，我们有

$$\begin{aligned} m(XI_B) &= m({}^pXI_B) \\ &= \int_{\Omega\times\boldsymbol{R}_+} {}^pX_t(\omega)n(\omega,t,B)m(\mathrm{d}\omega,\mathrm{d}t,\boldsymbol{E}) \\ &= E\left[\int_{\boldsymbol{R}_+} {}^pX_t(\omega)n(\omega,t,B)\mathrm{d}A_t(\omega)\right] \\ &= E\left[\int_{\boldsymbol{R}_+} X_t(\omega)n(\omega,t,B)\mathrm{d}A_t(\omega)\right] \\ &= E\left[\int_{\boldsymbol{R}_+\times B} X_t(\omega)\mu(\omega,\mathrm{d}t,\mathrm{d}x)\right] = M_\mu(XI_B). \end{aligned}$$

从而由测度扩张的唯一性，我们知道在$\mathscr{F}$上 $m = M_\mu$.

假设 m 在$\mathscr{P}$上 σ-有限，则存在$\mathscr{P}$的两两互不相交序列

$\{\widetilde{A}_n\}_{n\geqslant 1}$,使得$\widetilde{\Omega}=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\widetilde{A}_n$和$m(\widetilde{A}_n)<\infty(n\geqslant 1)$. 应用前面已证的结论到有限测度$m(WI_{\widetilde{A}_n})$上,存在可料可积的随机测度$\mu_n$,使得$m(WI_{\widetilde{A}_n})=M_{\mu_n}(W)$,$\forall\ W\in\widetilde{\mathscr{P}}^+$. 令

$$\mu=\sum_{n=1}^{\infty}I_{\widetilde{A}_n}\mu_n,$$

容易证明μ是可料的随机测度,并且$m=M_\mu$. 证毕.

1.1.7 定义 设μ是一随机测度,如果存在一可料随机测度υ满足

(Ⅰ) υ是可料σ-可积,

(Ⅱ) 限制在$\widetilde{\mathscr{P}}$上,$M_\mu=M_\upsilon$,

则称μ存在可料对偶投影,并称υ为μ的可料对偶投影. 由定理1.1.6知一个随机测度μ,如果其可料对偶投影存在,则其可料对偶投影是唯一的,以后记μ的可料对偶投影为μ^p.

1.1.8 定理 随机测度μ存在可料对偶投影的充要条件是μ可料σ-可积.

证明 必要性是显然的. 下面只要证明充分性.

对任一非负有界可测过程X及非负有界$\mathscr{E}$-可测函数h,令

$m(Xh)=M_\mu({}^pXh)$.

因为M_μ在$\widetilde{\mathscr{P}}$上σ-有限,所以我们把m唯一地扩张成$\widetilde{\mathscr{F}}$上的测度. 显然,限制在$\widetilde{\mathscr{P}}$上$m=M_\mu$. 容易验证m满足定理1.1.6中的条件. 因此存在一可料随机测度υ,使得$m=M_\upsilon$. 所以υ是可料σ-可积的,并且$\upsilon=\mu^p$. 证毕.

1.1.9 定理 假设随机测度μ存在可料对偶投影,取$W\in\widetilde{\mathscr{F}}^+$,使得$\upsilon=W.\mu$是可料$\sigma$-可积随机测度,则$\upsilon$存在可料对偶投影

$\upsilon^p=U.\mu^p$,

其中$U = M_\mu(W \mid \widetilde{\mathscr{P}})$.

证明　由假设知M_ν是$\widetilde{\mathscr{P}}$上σ-有限测度,这表明在M_μ下,W关于$\widetilde{\mathscr{P}}$是σ-可积的.因此$U = M_\mu(W \mid \widetilde{\mathscr{P}})$是有限的.取$\widetilde{\Omega}$上的可料过程$H$,使得$M_\nu(|H|) = M_\mu(|WH|) < \infty$,则

$$\begin{aligned}M_\nu(H) &= M_\mu(WH) = M_\mu[M_\mu(WH \mid \widetilde{\mathscr{P}})] = M_\mu[UH] \\ &= M_{\mu^p}(UH) = M_{U.\mu^p}(H).\end{aligned}$$

因此$\nu^p = U.\mu^p$.证毕.

1.1.10　推论　设随机测度μ存在可料对偶投影μ^p,$W \in \widetilde{\mathscr{F}}$使得$X = W.\mu$是局部可积的变差过程,则$X$存在可料对偶投影$X^p = U.\mu^p$,其中$U = M_\mu(W \mid \widetilde{\mathscr{P}})$.

1.1.11　定义　如果

(Ⅰ)μ取值于$\{0,1,2,\cdots,+\infty\}$,

(Ⅱ)对任意的$t > 0$,$\mu(\{t\} \times \boldsymbol{E}) \leqslant 1$,

(Ⅲ)μ是可选的,并且可选σ-可积,

则随机测度μ称为是整值随机测度.

1.1.12　定理　μ是整值随机测度的充要条件是

$$\mu(\mathrm{d}t,\mathrm{d}x) = \sum_s \delta_{(s,\beta_s)}(\mathrm{d}t,\mathrm{d}x) I_D(s), \tag{1.6}$$

其中D是稀疏集,即存在停时列T_n,使得$D = \bigcup_{n=1}^{\infty} [\![T_n]\!]$,$\beta = (\beta_t)_{t\geqslant 0}$是可选过程.

证明　充分性　只要验证μ是可选的,并且是可选σ-可积.设$(T_n)_{n\geqslant 1}$是图互不相交的停时列,使得$D = \bigcup_{n=1}^{\infty} [\![T_n]\!]$,$W \in \widetilde{\mathscr{O}}$使得$W.\mu$有意义,则

$$W.\mu = \sum_n W(T_n, \beta_{T_n}) I_{[\![T_n,\infty [\![}.$$

由引理1.1.2知$W.\mu$是可选的.因此μ可选.另一方面,令$\widetilde{A}_n$

$= (\bigcup_{k=1}^{n} [\![T_k]\!] \cup D^c) \times E$，则$\widetilde{A}_n \in \widetilde{\mathscr{O}}$，$\widetilde{A}_n \uparrow \widetilde{\Omega}$，并且

$$M_\mu(\widetilde{A}_n) \leqslant n, \qquad n \geqslant 1$$

因此 μ 是可选 σ- 可积.

必要性　记 $D = \{(\omega,t): \mu(\{t\} \times E) = 1\}$，则 D 是稀疏集. 事实上，令$\widetilde{A}_n \in \widetilde{\mathscr{O}}$，使得$\widetilde{A}_n \uparrow \widetilde{\Omega}$，并且对 $n \geqslant 1$，$M_\mu(\widetilde{A}_n) < \infty$，则 $B^{(n)} = I_{\widetilde{A}_n} . \mu$ 是可选的可积增过程，并且 $D = \bigcup_{n=1}^{\infty} [B^{(n)} \neq 0]$. 设 $D = \bigcup_{n=1}^{\infty} [\![T_n]\!]$，其中$\{T_n\}_{n \geqslant 1}$ 是图互不相交的停时列.

因为$\mathscr{E}$是由可列集张成的，并且E中的每个单点集是可测的，所以如果 $T_n(\omega) < \infty$，则存在一个实数 $\beta_{T_n(\omega)}(\omega)$ 使得

$$\mu(\omega, \{(T_n(\omega), \beta_{T_n(\omega)}(\omega))\}) = 1, \qquad n \geqslant 1.$$

令

$$\beta = \sum_n \beta_{T_n} I_{[\![T_n]\!]},$$

则(1.6) 成立. 最后我们证明 β 是可选的. 对任意的 $B \in \mathscr{E}$，由于

$$\{\beta_{T_n} \in B, T_n < \infty\} = \{\mu(\{T_n\} \times B) = 1, T_n < \infty\},$$

$\mu(\{T_n\} \times B) I_{\{T_n < \infty\}}$ 是可选增过程 $I_{[\![T_n]\!] \times B} . \mu$ 在时刻 T_n 的跳幅，并且 $\beta_{T_n} I_{\{T_n < \infty\}} \in \mathscr{F}_{T_n}$，所以 β 是可选的. 证毕.

1.2　跳过程

1.2.1　定义　随机过程 X 称为是跳过程，如果它的样本轨道是右连左极的节梯函数，并且在任一有限区间上只有有限多个跳跃点，即 X 可表示为：

$$X = X_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n I_{[\![T_n, \infty [\![}, \tag{2.1}$$

其中(1)$T_n \uparrow \infty$；(2) 对每个 $n \geqslant 1$，$T_n < \infty \Rightarrow T_n < T_{n+1}$ $(T_0 = 0)$；

(3) 对每个 $n \geqslant 1, \xi_n \neq 0 \Longleftrightarrow T_n < \infty$. 事实上，对每个 $n \geqslant 1, T_n$ 是 X 的第 n 个跳时

$$T_n = \inf\{t > T_{n-1}: X_t \neq X_{T_{n-1}}\}, \quad n \geqslant 1,$$

$\xi = \Delta X_{T_n} I_{(T_n < \infty)}$ 是 X 的第 n 个跳幅.

显然，我们有跳过程 X 适应的充要条件是每个 T_n 是停时，且 $\xi_n \in \mathscr{F}_{T_n}$.

定义

$$\mathscr{F}_t^0(X) = \sigma\{X_s, s \leqslant t\} = \sigma\{X_{s\wedge t}, s \geqslant 0\}, \quad t \geqslant 0,$$

则称 $(\mathscr{F}_t^0(X))_{t\geqslant 0}$ 为 X 的自然 σ- 域流.

取定 X 是跳过程，$(\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$ 为 X 的自然 σ- 域流 $(\mathscr{F}_t^0(X))_{t\geqslant 0}$ 关于概率测度 P 的完备化，则我们有下述定理成立.

1.2.2 定理 (1) 随机过程 $Y = (Y_t)_{t\geqslant 0}$ 为 $(\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$ 可选的充要条件是对任意的 $n \geqslant 1$，存在随机过程 $Y^{(n)} \in \mathscr{B}_+ \times \mathscr{F}_{T_{n-1}}$，使得

$$Y = \sum_{n=1}^{\infty} Y^{(n)} I_{[\![T_{n-1}, T_n[\![}. \tag{2.2}$$

(2) 随机过程 $Y = (Y_t)_{t\geqslant 0}$ 为 $(\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$ 可料的充要条件是对任意的 $n \geqslant 1$，存在随机过程 $Y^{(n)} \in \mathscr{B}_+ \times \mathscr{F}_{T_{n-1}}$，使得

$$Y = Y_0 I_{[\![0]\!]} + \sum_{n=1}^{\infty} Y^{(n)} I_{]\!]T_{n-1}, T_n]\!]}, \qquad Y_0 \in \mathscr{F}_0. \tag{2.3}$$

证明　由随机过程的一般理论，充分性是显然的. 只要证明必要性.

(1) 由单调类定理，只要对 $Y = I_{[\![T, \infty[\![}$ 验证(2.2)成立，其中 T 为一停时. 设 $R_n \in \mathscr{F}_{T_{n-1}}$ 满足条件

$$T < T_n \Rightarrow R_n = T, \qquad R_n \geqslant T_n \Rightarrow T = T_n. \tag{2.4}$$

令 $Y_t^{(n)} = I_{(R_n \leqslant t)}$，则 $Y^{(n)} = (Y_t^{(n)})_{t\geqslant 0} \in \mathscr{B}_+ \times \mathscr{F}_{T_{n-1}}$，并且在集合 $\{T_{n-1} \leqslant t < T_n\}$ 上，$T \leqslant t$ 等价于 $R_n \leqslant t$，即

$$Y I_{[\![T_{n-1}, T_n[\![} = Y^{(n)} I_{[\![T_{n-1}, T_n[\![}.$$

由此即得(2.2)成立.

(2) 也由单调类定理,只要对 $Y = I_{[\![0,T]\!]}$ 验证(2.3)成立,其中 T 为一停时. 对于满足(2.4)的 R_n,令 $Y_t^{(n)} = I_{\{t \leqslant R_n\}}$,则 $Y^{(n)} \in \mathscr{B}_+ \times \mathscr{F}_{T_{n-1}}$,且在 $\{T_{n-1} \leqslant t < T_n\}$ 上,$T \geqslant t$ 等价于 $R_n \geqslant t$. 事实上,若 $T \geqslant t$,由 $T \geqslant T_n$ 时有 $R_n \geqslant T_n \geqslant t$,$T < T_n$ 时有 $R_n = T \geqslant t$; 反之,若 $R_n \geqslant t$,则 $R_n \geqslant T_n$ 时,$T \geqslant T_n \geqslant t$,$R_n < T_n$ 时有 $T = R_n \geqslant t$. 因此

$$YI_{]\!]T_{n-1},T_n]\!]} = Y^{(n)}I_{]\!]T_{n-1},T_n]\!]}.$$

由此即得(2.3)成立. 证毕.

由定义知跳过程 X 的跳测度可表示为

$$N(\mathrm{d}t,\mathrm{d}x) = \sum_{n=1}^{\infty} \delta_{(T_n,\xi_n)}(\mathrm{d}t,\mathrm{d}x) I_{\{T_n<\infty\}}.$$

显然

$$X = X_0 + x.\mu.$$

1.2.3 定理 对任意的 $n \geqslant 1$,定义

$$G_n(\mathrm{d}t,\mathrm{d}x) = P(\{T_{n+1} \in \mathrm{d}t, \xi_{n+1} \in \mathrm{d}x \mid \mathscr{F}_{T_n}\})$$

以及

$$H_n(\mathrm{d}t) = G_n(\mathrm{d}t,\boldsymbol{R}) = P(\{T_{n+1} \in \mathrm{d}t \mid \mathscr{F}_{T_n}\}),$$

则

$$\upsilon(\mathrm{d}t,\mathrm{d}x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{G_n(\mathrm{d}t,\mathrm{d}x)}{H_n([t,\infty])} I_{\{T_n<t\leqslant T_{n+1}\}} \tag{2.5}$$

是 μ 的可料对偶投影.

证明 首先我们证明(2.5)是有意义的. 事实上,令 $S_{n+1} = \inf\{t: H_n([t,\infty]) = 0\}$,则 $S_{n+1} \in \mathscr{F}_{T_n}$,$H_n(]S_{n+1},\infty]) = 0$,对 $t < S_{n+1}$,$H_n([t,\infty]) > 0$,并且

$$\begin{aligned} P(\{T_{n+1} > S_{n+1}\}) &= E[P(T_{n+1} > S_{n+1} \mid \mathscr{F}_{T_n})] \\ &= E[H_n(]S_{n+1},\infty])] = 0, \end{aligned}$$

因此 $T_{n+1} \leqslant S_{n+1}$, $a.s.$ 当 $t \leqslant T_{n+1}$ $a.s.$ 时,或者有 $t < S_{n+1}$,此时

$H_n([t,\infty]) > 0$，或者有 $t = S_{n+1}$. 在后一种情况下，如果 $H_n([S_{n+1},\infty]) = 0$，即 $H_n(\{S_{n+1}\}) = 0$，则 $G_n(\{S_{n+1}\},\mathrm{d}x) = 0$. 所以 υ 的定义有意义.

再证 υ 为可料随机测度. 设 $Y = \sum_{n=1}^{\infty} Y^{(n)} I_{]T_{n-1},T_n]}$，$Y^{(n)} \in \mathscr{B}_+ \times \mathscr{F}_{T_{n-1}}$，$B \in \mathscr{B}(\boldsymbol{R})$，则 $H = YI_B \in \mathscr{P} \times \mathscr{B}(\boldsymbol{R})$. 因为

$$\int_0^t \int_{\boldsymbol{R}} H(s,x)\upsilon(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x) = \int_0^t Y_s \upsilon(\mathrm{d}s,B)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t Y_s \frac{G_n(\mathrm{d}s,B)}{H_n([s,\infty])} I_{\{T_{n-1}<s\leqslant T_n\}}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t Y_s^{(n)} \frac{G_n(\mathrm{d}s,B)}{H_n([s,\infty])} I_{\{T_{n-1}<s\leqslant T_n\}}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t Y_s^{(n)} \frac{G_n(\mathrm{d}s,B)}{H_n([s,\infty])} I_{\{T_{n-1}<s\leqslant T_n\}} \right] I_{\{T_{k-1}<t\leqslant T_k\}}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \left[\sum_{n=1}^{k} \int_0^t Y_s^{(n)} \frac{G_n(\mathrm{d}s,B)}{H_n([s,\infty])} I_{\{T_{n-1}<s\leqslant T_n\}} \right] I_{\{T_{k-1}<t\leqslant T_k\}},$$

而 $\sum_{n=1}^{k} \int_0^t Y_s^{(n)} \frac{G_n(\mathrm{d}s,B)}{H_n([s,\infty])} I_{\{T_{n-1}<s\leqslant T_n\}} \in \mathscr{B}_+ \times \mathscr{F}_{T_{n-1}}$，由定理 1.2.2 知 $\int_0^{\cdot}\int_{\boldsymbol{R}} H(s,x)\upsilon(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)$ 为可料过程. 利用单调类定理即得对任意的 $H \in \mathscr{P} \times \mathscr{B}(\boldsymbol{R})$，$\int_0^{\cdot}\int_{\boldsymbol{R}} H(s,x)\upsilon(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)$ 可料，故 υ 为可料测度.

最后证明 υ 是 μ 的可料对偶投影. 利用单调类定理，我们只要证明对任意的 $B \in \mathscr{B}(\boldsymbol{R})$，$\upsilon([0,t] \times B)$ 为 $N_t^B = \mu([0,t] \times B)$ 的可料对偶投影. 显然 $N_{T_n}^B \leqslant n$，所以 $(N_t^B)_{t\geqslant 0}$ 为局部可积的增过程. 故只要证明对任意停时 T 及 $n \geqslant 1$，

$$E\mu([0,T_n \wedge T] \times B) = E\upsilon([0,T_n \wedge T] \times B).$$

但是，

$$\mu([0,T_n \wedge T] \times B) = \sum_{k=1}^{n} I_{\{T_{k-1}\leqslant T\}} \mu(]T_{k-1},T_k \wedge T] \times B),$$

$$\upsilon([0,T_n \wedge T] \times B) = \sum_{k=1}^{n} I_{(T_{k-1} \leqslant T)} \upsilon(]T_{k-1}, T_k \wedge T] \times B).$$

因此只要证明对任意的 $n \geqslant 1$,

$$E\left(I_{(T_{n-1} \leqslant T)} \mu(]T_{n-1}, T_n \wedge T] \times B) \right)$$

$$= E\left(I_{(T_{n-1} \leqslant T)} \upsilon(]T_{n-1}, T_n \wedge T] \times B) \right). \tag{2.6}$$

设 $R_n \in \mathscr{F}_{T_{n-1}}$ 使得 $T \wedge T_n = R_n \wedge T_n$,则

$$\upsilon(]T_{n-1}, T_n \wedge T] \times B) = \int_{T_{n-1}}^{T_n \wedge T} \frac{G_n(\mathrm{d}t, B)}{H_n([t, \infty])}$$

$$= \int_{T_{n-1}}^{R_n \wedge T_n} \frac{G_n(\mathrm{d}t, B)}{H_n([t, \infty])}.$$

$$E\left(I_{(T_{n-1} \leqslant T)} \upsilon(]T_{n-1}, T_n \wedge T] \times B) \right)$$

$$= E\left\{ I_{(T_{n-1} \leqslant T)} E\left[\int_{T_{n-1}}^{R_n \wedge T_n} \frac{G_n(\mathrm{d}t, B)}{H_n([t, \infty])} \middle| \mathscr{F}_{T_{n-1}} \right] \right\}$$

$$= E\left\{ I_{(T_{n-1} \leqslant T)} \int_{T_{n-1}}^{\infty} H_n(\mathrm{d}t) \int_{T_{n-1}}^{t \wedge R_n} \frac{G_n(\mathrm{d}s, B)}{H_n([s, \infty])} \right\}$$

$$= E\left\{ I_{(T_{n-1} \leqslant T)} \int_{T_{n-1}}^{\infty} H_n(\mathrm{d}t) \int_{T_{n-1}}^{\infty} [I_{(R_n < t)(s \leqslant R_n)} + I_{(R_n \geqslant t)(s \leqslant t)}] \right.$$

$$\left. \cdot \frac{G_n(\mathrm{d}s, B)}{H_n([s, \infty])} \right\}$$

$$= E\left\{ I_{(T_{n-1} \leqslant T)} \int_{T_{n-1}}^{\infty} \frac{G_n(\mathrm{d}s, B)}{H_n([s, \infty])} I_{(s \leqslant R_n)} [H_n((R_n, \infty)) \right.$$

$$\left. + H_n([s, R_n])] \right\}$$

$$= E\left\{ I_{(T_{n-1} \leqslant T)} \int_{T_{n-1}}^{\infty} I_{(s \leqslant R_n)} G_n(\mathrm{d}s, B) \right\}, \tag{2.7}$$

上面最后第二个等号是由交换积分得到的. 另一方面,

$$E\left(I_{(T_{n-1} \leqslant T)} \mu(]T_{n-1}, T_n \wedge T] \times B) \right)$$

$$= E\left\{ I_{(T_{n-1} \leqslant T)} \mu(]T_{n-1}, T_n \wedge R_n] \times B) \right\}$$

$$= E\left\{ I_{(T_{n-1} \leqslant T)} I_{(R_n \geqslant T_n, \xi_n \in B)} \right\}$$

$$= E\left\{ I_{(T_{n-1} \leqslant T)} E\left(I_{(R_n \geqslant T_n, \xi_n \in B)} \middle| \mathscr{F}_{T_{n-1}} \right) \right\}$$

$$= E\left\{ I_{(T_{n-1}\leq T)}\int_{T_{n-1}}^{\infty} I_{(R_n\geq s)}G_n(\mathrm{d}s,B)\right\}. \tag{2.8}$$

比较(2.7)和(2.8)即得(2.6)成立. 证毕.

1.2.4 定理 跳过程 X 为 Markov 过程的充要条件是 $(T_n,X_{T_n})_{n\geq 0}$ 为以 $\overline{\boldsymbol{R}_+}\times\boldsymbol{R}$ 为状态空间的时齐 Markov 链，并且它的转移概率测度 $Q(s,x;\mathrm{d}t,\mathrm{d}y)$ 满足下列条件：

(Ⅰ) 对 $0\leqslant s\leqslant u\leqslant t<\infty$,

$$Q(s,x;\mathrm{d}t,\mathrm{d}y) = Q(s,x;]u,\infty]\times\boldsymbol{R})Q(u,x;\mathrm{d}t,\mathrm{d}y); \tag{2.9}$$

(Ⅱ) 对 $s<\infty$, $Q(s,x;]0,s]\times\boldsymbol{R})=0$;

(Ⅲ) 对 $s<\infty$,

$$Q(s,x;\{\infty\},\mathrm{d}y) = Q(s,x;\{\infty\}\times\boldsymbol{R})\varepsilon_x(\mathrm{d}y); \tag{2.10}$$

(Ⅳ) 对 $s<\infty$, $Q(s,x;\boldsymbol{R}_+\times\{x\})=0$;

(Ⅴ) $Q(\infty,x;\mathrm{d}t,\mathrm{d}y)=\varepsilon_\infty(\mathrm{d}t)\varepsilon_x(\mathrm{d}y)$.

其中 $\overline{\boldsymbol{R}_+}=\boldsymbol{R}_+\cup\{+\infty\}$.

证明 必要性 设 X 为 Markov 过程，$P^{s,x}$ 为其转移概率测度. 对 $A\in\sigma\{X_t,t\geqslant s\}$,

$P(A|\mathscr{F}_s)=P^{s,X_s}(A)$, $\quad a.s.$

对任意的 $0\leqslant s<\infty$，定义 $\tau_s=\inf\{t>s:X_t\neq X_s\}$，及

$Q(s,x;\mathrm{d}t,\mathrm{d}y)=P^{s,x}(\tau_s\in\mathrm{d}t,X_{\tau_s}\in\mathrm{d}x)$,

则显然有 $\tau_s>s$. 由跳过程的样本函数为右连左极的节梯函数知 Q 满足(Ⅱ)、(Ⅲ)和(Ⅳ). 补充定义

$Q(\infty,x;\mathrm{d}t,\mathrm{d}y)=\varepsilon_\infty(\mathrm{d}t)\varepsilon_x(\mathrm{d}y)$,

则(Ⅴ)也得到满足. 往证明(Ⅰ)成立. 若在相空间 $\boldsymbol{R}$ 中取离散拓扑，则 X 是右连续的 Feller 过程，从而 X 有强 Markov 性. 当 $0\leqslant s\leqslant u\leqslant t<\infty$ 时，如果 $\tau_s\in\mathrm{d}t$，则 $\tau_s>u,\tau_u=\tau_s,X_u=X_s$. 因此

$$\begin{aligned}Q(s,x;\mathrm{d}t,\mathrm{d}y) &= P^{s,x}(\tau_s\in\mathrm{d}t,X_{\tau_s}\in\mathrm{d}x)\\ &= P^{s,x}(\tau_s>u,\tau_u\in\mathrm{d}t,X_{\tau_u}\in\mathrm{d}y)\end{aligned}$$

$$= E^{s,x}\{I_{\{\tau_s > u\}} P^{u,X_u}\{\tau_u \in \mathrm{d}t, X_{\tau_u} \in \mathrm{d}y\}\}$$
$$= Q(u,x;\mathrm{d}t,\mathrm{d}y)Q(s,x;]u,\infty] \times \boldsymbol{R}).$$

对停时 T_n 应用强 Markov 性，并注意到 $T_n < \infty$ 时，$\tau_{T_n} = T_{n+1}$ 及 $T_n \in \mathscr{F}_{T_n}$，在 $\{T_n < \infty\}$ 上我们有

$$P(T_{n+1} \in \mathrm{d}t, X_{T_{n+1}} \in \mathrm{d}y | \mathscr{F}_{T_n})$$
$$= P(\tau_{T_n} \in \mathrm{d}t, X_{\tau_{T_n}} \in \mathrm{d}y | \mathscr{F}_{T_n})$$
$$= P^{s,X_s}(\tau_s \in \mathrm{d}t, X_{\tau_s} \in \mathrm{d}y)|_{s=T_n}$$
$$= Q(T_n, X_{T_n}; \mathrm{d}t, \mathrm{d}y).$$

在 $\{T_n = \infty\}$ 上可直接验证

$$P(T_{n+1} \in \mathrm{d}t, X_{T_{n+1}} \in \mathrm{d}y | \mathscr{F}_{T_n}) = Q(T_n, X_{T_n}; \mathrm{d}t, \mathrm{d}y).$$

这表明 $(T_n, X_{T_n})_{n\geqslant 1}$ 为时齐 Markov 链，且以 $Q(s,x;\mathrm{d}t,\mathrm{d}y)$ 为转移概率测度.

充分性　对 $0 \leqslant s \leqslant t < \infty, x \in \boldsymbol{R}$，定义

$$q(s,x,t) = Q(s,x;]t,\infty] \times \boldsymbol{R}),$$

则由(2.9)知，当 $0 \leqslant s \leqslant u \leqslant t < \infty$ 时，

$$q(s,x,t) = q(s,x,u)q(u,x,t); \tag{2.11}$$
$$Q(s,x;\mathrm{d}t,\mathrm{d}y) = q(s,x,u)Q(u,x;\mathrm{d}t,\mathrm{d}y). \tag{2.12}$$

记 $Q^{(n)}(s,x;\mathrm{d}t,\mathrm{d}y)$ 为 $Q(s,x;\mathrm{d}t,\mathrm{d}y)$ 的 n 步转移概率测度. 对于 $0 \leqslant s \leqslant t < \infty, x \in \boldsymbol{R}$ 及 $A \in \mathscr{B}(\boldsymbol{R})$，定义

$$P^{(0)}(s,x,t,A) = q(s,x,t)\varepsilon_x(A),$$
$$P^{(k)}(s,x,t,A) = \iint_{]s,t]\times A} q(u,y,t)Q^{(k)}(s,x;\mathrm{d}u,\mathrm{d}y).$$

则对任意的 $k \geqslant 0$，利用 Fubini 定理我们有

$$P^{(k+1)}(s,x,t,A) = \iint_{]s,t]\times A} q(u,y,t)Q^{(k+1)}(s,x;\mathrm{d}u,\mathrm{d}y)$$
$$= \iint_{]s,t]\times A} q(u,y,t) \iint_{]s,u]\times \boldsymbol{R}} Q(s,x;\mathrm{d}\tau,\mathrm{d}z)Q^{(k)}(\tau,z;\mathrm{d}u,\mathrm{d}y)$$

$$= \iint_{]s,t]\times R}\Big[\iiint_{]\tau,t]\times A} q(u,y,t)Q^{(k)}(\tau,z;\mathrm{d}u,\mathrm{d}y)\Big]Q(s,x;\mathrm{d}\tau,\mathrm{d}z)$$

$$= \iint_{]s,t]\times R} P^{(k)}(\tau,z,t,A)Q(s,x;\mathrm{d}\tau,\mathrm{d}z). \tag{2.13}$$

下面我们证明

$$P(X_t\in A, X\ 在]T_n,t]\ 中有\ k\ 个跳跃点\ |\mathscr{F}_{T_n})I_{\{T_n<t\}}$$
$$= P^{(k)}(T_n,X_{T_n},t,A)I_{\{T_n<t\}}. \tag{2.14}$$

对 k 用归纳法证明. $k=0$ 时,对一切 $n\geqslant 0$

$$P(X_t\in A, X\ 在]T_n,t]\ 中没有跳跃点\ |\mathscr{F}_{T_n})I_{\{T_n<t\}}$$
$$= P(X_{T_n}\in A, t<T_{n+1}|\mathscr{F}_{T_n})I_{\{T_n<t\}}$$
$$= I_{\{X_{T_n}\in A\}}P(t<T_{n+1}|\mathscr{F}_{T_n})I_{\{T_n<t\}}$$
$$= I_{\{X_{T_n}\in A\}}q(T_n,X_{T_n},t)I_{\{T_n<t\}}$$
$$= P^{(0)}(T_n,X_{T_n},t,A)I_{\{T_n<t\}}.$$

假设(2.14)对 k 及一切 $n\geqslant 0$ 成立,则对一切 $n\geqslant 0$,由(2.13)得

$$P(X_t\in A, X\ 在]T_n,t]\ 中有\ k+1\ 个跳跃点\ |\mathscr{F}_{T_n})I_{\{T_n<t\}}$$
$$= P(X_t\in A, X\ 在]T_{n+1},t]\ 中有\ k\ 个跳跃点,$$
$$T_{n+1}<t|\mathscr{F}_{T_n})I_{\{T_n<t\}}$$
$$= E\{I_{\{T_{n+1}<t\}}P^{(k)}(T_{n+1},X_{T_{n+1}},t,A)|\mathscr{F}_{T_n}\}I_{\{T_n<t\}}$$
$$= \iint_{]T_n,t]\times R} P^{(k)}(u,y,t,A)Q(T_n,X_{T_n};\mathrm{d}u,\mathrm{d}y)I_{\{T_n<t\}}$$
$$= P^{(k+1)}(T_n,X_{T_n},t,A)I_{\{T_n<t\}}.$$

再证明当 $0\leqslant s\leqslant t$ 时,

$$P(X_t\in A, X\ 在]s,t]\ 中有\ k\ 个跳跃点\ |\mathscr{F}_s)$$
$$= P^{(k)}(s,X_s,t,A). \tag{2.15}$$

对 k 也利用归纳法证明. 当 $k=0$ 时,由(2.11)我们有

$$P(X_t\in A, X\ 在]s,t]\ 中没有跳跃点\ |\mathscr{F}_s)$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{P(X_t\in A, X\ 在]s,t]\ 中没有跳跃点, T_{n+1}>s|\mathscr{F}_{T_n})}{P(T_{n+1}>s|\mathscr{F}_{T_n})}$$

$$
\begin{aligned}
&\cdot I_{\{T_n\leqslant s<T_{n+1}\}}\\
&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{P(X_{T_n}\in A,T_{n+1}>t\,|\,\mathscr{F}_{T_n})}{q(T_n,X_{T_n},s)}I_{\{T_n\leqslant s<T_{n+1}\}}\\
&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{I_{\{X_{T_n}\in A\}}q(T_n,X_{T_n},t)}{q(T_n,X_{T_n},s)}I_{\{T_n\leqslant s<T_{n+1}\}}\\
&=\sum_{n=0}^{\infty}I_{\{X_{T_n}\in A\}}q(s,X_{T_n},t)I_{\{T_n\leqslant s<T_{n+1}\}}\\
&=\sum_{n=0}^{\infty}P^{(0)}(s,X_{T_n},t,A)I_{\{T_n\leqslant s<T_{n+1}\}}=P^{(0)}(s,X_s,t,A).
\end{aligned}
$$

假设(2.15)对 k 成立，则由(2.12)和(2.13)，我们有

$$
\begin{aligned}
&P(X_t\in A,X\text{ 在 }]s,t]\text{ 中有 }k+1\text{ 个跳跃点 }|\,\mathscr{F}_s)\\
&=\sum_{n=0}^{\infty}P(X_t\in A,X\text{ 在 }]s,t]\text{ 中有 }k+1\text{ 个跳跃点},\\
&\quad T_{n+1}>s\,|\,\mathscr{F}_{T_n})/P(T_{n+1}>s\,|\,\mathscr{F}_{T_n})\cdot I_{\{T_n\leqslant s<T_{n+1}\}}\\
&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{P(X_t\in A,X\text{ 在 }]T_{n+1},t]\text{ 中有 }k\text{ 个跳跃点},T_{n+1}>s\,|\,\mathscr{F}_{T_n})}{q(T_n,X_{T_n},s)}\\
&\quad\cdot I_{\{T_n\leqslant s<T_{n+1}\}}\\
&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{E[P^{(k)}(T_{n+1},X_{T_{n+1}},t,A)I_{\{s<T_{n+1}\leqslant t\}}\,|\,\mathscr{F}_{T_n}]}{q(T_n,X_{T_n},s)}I_{\{T_n\leqslant s<T_{n+1}\}}\\
&=\sum_{n=0}^{\infty}\iint_{]s,t]\times\mathbf{R}}P^{(k)}(u,y,t,A)\frac{Q(T_n,X_{T_n};\mathrm{d}u,\mathrm{d}y)}{q(T_n,X_{T_n},s)}I_{\{T_n\leqslant s<T_{n+1}\}}\\
&=\sum_{n=0}^{\infty}\iint_{]s,t]\times\mathbf{R}}P^{(k)}(u,y,t,A)Q(s,X_{T_n};\mathrm{d}u,\mathrm{d}y)I_{\{T_n\leqslant s<T_{n+1}\}}\\
&=\sum_{n=0}^{\infty}P^{(k+1)}(s,X_{T_n},t,A)I_{\{T_n\leqslant s<T_{n+1}\}}=P^{(k+1)}(s,X_s,t,A).
\end{aligned}
$$

由(2.15)即得

$$
\begin{aligned}
&P(X_t\in A\,|\,\mathscr{F}_s)\\
&=\sum_{k=0}^{\infty}P(X_t\in A,X\text{ 在 }]s,t]\text{ 中有 }k\text{ 个跳跃点 }|\,\mathscr{F}_s)
\end{aligned}
$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} P^{(k)}(s, X_s, t, A).$$

这表明 X 为 Markov 过程，其转移概率测度为

$$P(s,x,t,A) = \sum_{k=0}^{\infty} P^{(k)}(s, X_s, t, A).$$

证毕.

1.2.5 推论 跳过程 X 为时齐 Markov 过程的充要条件是：$(T_n, X_{T_n})_{n\geqslant 0}$ 为以 $\overline{\boldsymbol{R}_+} \times \boldsymbol{R}$ 为状态空间的 Markov 链，且其转移概率测度 $Q(s,x;\mathrm{d}t,\mathrm{d}y)$ 具有形式：对 $0 \leqslant s < \infty$，

$$Q(s,x;\mathrm{d}t,\mathrm{d}y) = \begin{cases} q(x)e^{-q(x)(t-s)}I_{\{t>s\}}\mathrm{d}tN(x,\mathrm{d}y), & q(x) > 0 \\ \varepsilon_\infty(\mathrm{d}t)\varepsilon_x(\mathrm{d}y), & q(x) = 0, \end{cases} \tag{2.16}$$

$$Q(\infty,x;\mathrm{d}t,\mathrm{d}y) = \varepsilon_\infty(\mathrm{d}t)\varepsilon_x(\mathrm{d}y),$$

其中 $q(x) \geqslant 0$ 为 $\boldsymbol{R}$ 上的可测函数. 当 $q(x) > 0$ 时，$N(x,\mathrm{d}y)$ 为 $\boldsymbol{R}$ 到 $\boldsymbol{R}$ 的转移概率测度，且 $N(x,\{x\}) = 0$.

证明 必要性 由时齐性

$$\begin{aligned} Q(s,x;\mathrm{d}t,\mathrm{d}y) &= P^{s,x}(\tau_s \in \mathrm{d}t, X_{\tau_s} \in \mathrm{d}y) \\ &= P^{0,x}(s + T_1 \in \mathrm{d}t, X_{T_1} \in \mathrm{d}y). \end{aligned}$$

另一方面，对时齐 Markov 过程，我们有

$$\begin{aligned} P^{0,x}(T_1 > t + s) &= E^{0,x}[P^{0,x}(T_1 > t + s \mid \mathscr{F}_t)I_{\{T_1>t\}}] \\ &= E^{0,x}[P^{t,X_t}(\tau_t > t + s)I_{\{T_1>t\}}] \\ &= P^{0,x}(T_1 > t)P^{0,x}(T_1 > s). \end{aligned}$$

从而存在 $\boldsymbol{R}$ 上的可测函数 $q(x) \geqslant 0$，使得

$$P^{0,x}(T_1 > t) = e^{-q(x)t}, \quad t \geqslant 0.$$

显然，当 $q(x) = 0$ 时，$Q(s,x;\mathrm{d}t,\mathrm{d}y) = \varepsilon_\infty(\mathrm{d}t)\varepsilon_x(\mathrm{d}y)$. 当 $q(x) > 0$ 时，

$$\begin{aligned} P^{0,x}(T_1 > t, X_{T_1} \in \mathrm{d}y) &= E^{0,x}[P^{0,x}(X_{\tau_t} \in \mathrm{d}y \mid \mathscr{F}_t)I_{\{T_1>t\}}] \\ &= E^{0,x}[P^{0,X_t}(X_{T_1} \in \mathrm{d}y)I_{\{T_1>t\}}] \end{aligned}$$

$$= P^{0,x}(X_{T_1} \in \mathrm{d}y) P^{0,x}(T_1 > t)$$
$$= e^{-q(x)t} N(x, \mathrm{d}y),$$

其中 $N(x,\mathrm{d}y) = P^{0,x}(X_{T_1} \in \mathrm{d}y)$. 显然 $N(x,\{x\}) = 0$,即(2.16)成立.

充分性　(2.16) 所定义的 $Q(s,x;\mathrm{d}t,\mathrm{d}y)$ 显然满足定理 1.2.4 中的条件,因此 X 是 Markov 过程. 同时可以直接验证定理 1.2.4 中所定义的转移概率 $P(s,x,t,A)$ 只依赖于$(t-s)$,故 X 时齐. 证毕.

1.2.6　定理　跳跃过程 X 为 Markov 过程的充要条件是其跳测度的可料对偶投影 $\upsilon(\mathrm{d}t,\mathrm{d}x)$ 具有如下形式:

$$\upsilon(\mathrm{d}t,\mathrm{d}x) = N(t,X_{t-};X_{t-}+\mathrm{d}x)\Lambda(X_{t-},\mathrm{d}t), \tag{2.17}$$

其中:(1)$N(t,x;\mathrm{d}y)$ 为 $\boldsymbol{R}_+ \times \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ 的转移概率测度,且 $N(t,x;\{x\}) = 0$;(2)$\Lambda(x,\mathrm{d}t)$ 为 $\boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}_+$ 的 σ-有限转移测度,$\Lambda(x,\{t\}) \leqslant 1$,且存在两列 $\boldsymbol{R}$ 上的可测函数$\{f_n(x)\}$ 和$\{g_n(x)\}$,使得对任意 $x \in \boldsymbol{R}$,$\boldsymbol{R}_+ = \bigcup_{n=1}^{\infty}[f_n(x),g_n(x)]$,对每个 $t \in (f_n(x),g_n(x))$,$\Lambda(x,]f_n(x),t[) < \infty$.

证明　留给读者作为练习(参见[13]).

利用推论 1.2.5 和定理 1.2.6,我们有如下结论.

1.2.7　推论　跳过程 X 为时齐 Markov 过程的充要条件是其跳测度的可料对偶投影 υ 具有下列形式:

$$\upsilon(\mathrm{d}t,\mathrm{d}x) = N(X_{t-},X_{t-}+\mathrm{d}x)q(X_{t-})\mathrm{d}t, \tag{2,18}$$

其中 $q(x) \geqslant 0$ 为 $\boldsymbol{R}$ 上的可测函数,$N(x,\mathrm{d}y)$ 为 $\boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ 上的转移概率测度,$N(x,\{x\}) = 0$.

1.3 Hilbert 空间的张量积和算子

一、张量积

设 $\boldsymbol{H}$ 是一实值 Hilbert 空间，内积为 $x \cdot y$. 如果考虑多个 Hilbert 空间，我们以 $(x, y)_H$ 代替 $x \cdot y$.

我们记 $\boldsymbol{H} \otimes \boldsymbol{H}$ 为 $\boldsymbol{H}$ 自身的张量积，$x \otimes y$ 是 $x, y \in \boldsymbol{H}$ 的张量积. 如果 $x = y$，我们记 $x \otimes x = x^{\otimes_2}$.

设 $(x_i, y_i)_{i \in I}$ 是 $\boldsymbol{H}$ 的有限元对族，记 $Z = \sum_{i \in I} x_i \otimes y_i$ 为 $\boldsymbol{H} \otimes \boldsymbol{H}$ 中联系这个族的元素，类似地我们考虑 $Z' = \sum_{j \in J} x'_j \otimes y'_j$，令

$$(Z, Z') = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} (x_i, x'_j) \cdot (y_i, y'_j), \tag{3.1}$$

则我们就在 $\boldsymbol{H} \otimes \boldsymbol{H}$ 上定义一个内积.

记 $\boldsymbol{H} \hat{\otimes}_2 \boldsymbol{H}$ 为 $\boldsymbol{H} \otimes \boldsymbol{H}$ 在由这个内积所联系的拓扑的完备化，$\boldsymbol{H} \hat{\otimes}_2 \boldsymbol{H}$ 中相应的范数称为 Hilbert-Schmidt 范数，记为 $\| \cdot \|_2$. 关于(3.1) 所定义的内积 $\boldsymbol{H} \hat{\otimes}_2 \boldsymbol{H}$ 是一可分的 Hilbert 空间. 如果 $(h_n)_{n \geqslant 1}$ 是 $\boldsymbol{H}$ 的一个正交基，则 $(h_n \otimes h_m)_{n,m \geqslant 1}$ 是 $\boldsymbol{H} \hat{\otimes}_2 \boldsymbol{H}$ 的一个正交基. 如果 $x, y \in \boldsymbol{H}$，则

$$\| x \otimes y \| = \| x \|_H \cdot \| y \|_H.$$

从 $\boldsymbol{H} \times \boldsymbol{H}$ 到 $\boldsymbol{H} \hat{\otimes}_2 \boldsymbol{H}$ 的映射 $(x, y) \to x \otimes y$ 是连续双线性映射.

上述这些性质都是众所周知并容易证明. 如果当 $\boldsymbol{H}$ 是 d- 维空间，则 $\boldsymbol{H} \otimes \boldsymbol{H} = \boldsymbol{H} \hat{\otimes}_2 \boldsymbol{H}$ 与 $d \times d$ 矩阵所组成的空间同构. 确切地说，设 $(h_n)_{n \leqslant d}$ 是 $\boldsymbol{H}$ 的一个正交基，设 $x_i = \sum_{n=1}^{d} x_{in} h_n$，$y_i = \sum_{n=1}^{d} y_{in} h_n$，

(X^i,Y^i) 是由 $X^i = \begin{pmatrix} x_{i1} \\ \vdots \\ x_{id} \end{pmatrix}$, $Y^i = \begin{pmatrix} y_{i1} \\ \vdots \\ y_{id} \end{pmatrix}$ 组成的矩阵，则 $d \times d$ 矩阵 $\left(\sum_{i\in I} x_{ij}y_{ik}\right)_{j,k\leq d} = \sum_{i\in I} X^i(Y^i)^T$ 与 $\boldsymbol{H} \otimes \boldsymbol{H}$ 中元素 $\sum_{i\in I} x^i \otimes y^i$ 之间建立一一对应. 如果在 $d \times d$ 矩阵空间上赋 Hilbert 范数 $\left\{\sum_{i\in I} Tr(X^i(X^i)^T)\right\}^{1/2}$，则上述对应是 $\boldsymbol{H} \hat{\otimes}_2 \boldsymbol{H}$ 到 $d \times d$ 矩阵空间上的同构映射.

对每个 Banach 空间 $\boldsymbol{B}$，空间 $\boldsymbol{B} \hat{\otimes}_1 \boldsymbol{B}$ 可定义为 $\boldsymbol{B} \otimes \boldsymbol{B}$ 在某一范数(记为 $\|\cdot\|_1$)下的完备化，它具有如下性质：

对每个 Banach 空间 $\boldsymbol{G}$ 及每个从 $\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{B}$ 到 $\boldsymbol{G}$ 的连续双线性映射 b，存在唯一关于范数 $\|\cdot\|_1$ 连续的线性映射 $\bar{b}: \boldsymbol{B} \hat{\otimes}_1 \boldsymbol{B} \to \boldsymbol{G}$ 使得 $b(x,y) = \bar{b}(x \otimes y)$.

特别地，取 $\boldsymbol{G} = \boldsymbol{R}$，可得 $\boldsymbol{B} \hat{\otimes}_1 \boldsymbol{B}$ 的对偶空间$(\boldsymbol{B} \hat{\otimes}_1 \boldsymbol{B})'$ 同构于带通常范数的连续双线型空间.

对于 Hilbert 空间 $\boldsymbol{H}$，存在一个从 $\boldsymbol{H} \hat{\otimes}_1 \boldsymbol{H}$ 到 $\boldsymbol{H} \hat{\otimes}_2 \boldsymbol{H}$ 内的连续线性映射，这个映射就是恒等映射 $h \otimes g \to h \otimes g$ 的延拓. 换言之，对任意的 $b \in \boldsymbol{H} \hat{\otimes}_1 \boldsymbol{H}$，$\|b\|_2 \leqslant \|b\|_1$，当 $b = h \otimes g$ 时，我们有 $\|h \otimes g\|_1 = \|h \otimes g\|_2 = \|h\|_H \|g\|_H$.

$\boldsymbol{H} \hat{\otimes}_1 \boldsymbol{H}$ 上线性迹形式是映射 $h \otimes g \to h \cdot g$ 在 $\boldsymbol{H} \hat{\otimes}_1 \boldsymbol{H}$ 上唯一的连续线性延拓.

二、Hilbert 空间上的 Hilbert-Schmidt 算子

对每个 $b \in \boldsymbol{H} \hat{\otimes}_1 \boldsymbol{H}$，我们可以联系一个双线性型式 $(h,g) \to (b, h \otimes g)$. 如果对任意的 $h \in \boldsymbol{H}$，$(b, h \otimes h) \geqslant 0$，则张量 b 被称为是正的；如果对任意的 $h,g \in \boldsymbol{H}$，$(b, h \otimes g) = (b, g \otimes h)$，则 b 称为

是对称的.

因此,$\boldsymbol{H}\hat{\otimes}_2\boldsymbol{H}$ 可以视为 $\boldsymbol{H}\times\boldsymbol{H}$ 上连续双线性型的特殊集,对 $\boldsymbol{H}\times\boldsymbol{H}$ 上每个双线性型 b,存在 $\boldsymbol{H}$ 上连续的线性算子 $\widetilde{b}$ 与 b 一一对应,并使得

$$b(h,g)=\widetilde{b}(h)\cdot g,\qquad \forall h,g\in\boldsymbol{H}.$$

如果 $b\in\boldsymbol{H}\hat{\otimes}_2\boldsymbol{H}$,则称线性算子 $\widetilde{b}$ 为 Hilbert-Schmidt 算子. $\|b\|_2$ 是 $\widetilde{b}$ 的 Hilbert-Schmidt 范数. 如果 b 是对称的,则称 $\widetilde{b}$ 是自伴算子.

如果假设 $(h_n)_{n\geqslant1}$ 是 $\boldsymbol{H}$ 的一个基,则我们有 Hilbert-Schmidt 算子的有用特征:$\widetilde{b}$ 是 Hilbert-Schmidt 算子的充要条件是

$$\sum_{n=1}^{\infty}\|\widetilde{b}(h_n)\|^2<\infty,\text{并且 }\|\widetilde{b}\|_2^2=\sum_n\|b(h_n)\|^2.$$

对 $\boldsymbol{H}$ 上任一自伴的 Hilbert-Schmidt 算子 $\widetilde{b}$,存在 $\boldsymbol{H}$ 的一个正交基 $(h_n)_{n\geqslant1}$,使得

$$\widetilde{b}(h)=\sum_n\lambda_n(h,h_n)h_n,\qquad \forall h\in\boldsymbol{H},$$

其中 λ_n 是实数,称之为 $\widetilde{b}$ 的特征值,并且满足

$$\sum_n\lambda_n^2=\|\widetilde{b}\|_2^2<\infty.$$

如果 $\widetilde{b}$ 是正的,则 λ_n 也是正的.

Hilbert-Schmidt 算子 $\widetilde{b}$ 的对偶算子 $\widetilde{b}^*$ 定义为 $\widetilde{b}(h)\cdot g=h\cdot\widetilde{b}^*(g)$. $\widetilde{b}^*$ 仍是 Hilbert-Schmidt 算子,并且 $\|\widetilde{b}^*\|_2=\|\widetilde{b}\|_2$.

如果我们记 $\mathscr{L}_2(\boldsymbol{H},\boldsymbol{H})$ 为 Hilbert-Schmidt 算子所组成的

Hilbert 空间，由上述结论 $\mathscr{L}_2(\boldsymbol{H},\boldsymbol{H})$ 上的内积可表示为

$$(\widetilde{b_1},\widetilde{b_2}) = Tr(\widetilde{b_1}\circ\widetilde{b_2}^*).$$

利用完全类似的方法，从公式

$$(h\otimes g,h'\otimes g') = (h,h')\cdot(g,g'),\quad h,h'\in\boldsymbol{H},g,g'\in\boldsymbol{G}$$

开始我们可以定义 $\boldsymbol{H}\hat{\otimes}_2\boldsymbol{G}$. 因此 $\mathscr{L}_2(\boldsymbol{H},\boldsymbol{G})$ 是从 $\boldsymbol{H}$ 到 $\boldsymbol{G}$ 的所有 Hilbert-Schmidt 算子组成的空间. $\widetilde{b}\in\mathscr{L}_2(\boldsymbol{H},\boldsymbol{G})$ 仍由性质

$$\sum_n \|\widetilde{b}(h_n)\|^2 = \|\widetilde{b}\|_2^2 < \infty$$

所确定，其中 $(h_n)_{n\geq 1}$ 是 $\boldsymbol{H}$ 的一个正交基.

三、核算子

设 $\boldsymbol{H}'$ 和 $\boldsymbol{H}$ 均为 Hilbert 空间，如果线性形式 $h\otimes g\to\widetilde{b}\,h\cdot g$ 与 $\boldsymbol{H}'\hat{\otimes}_1\boldsymbol{H}$ 中的元素 b 一致，则 $\widetilde{b}\in\mathscr{L}(\boldsymbol{H}',\boldsymbol{H})$ 称为是核算子.

自伴的核算子可以由下述性质所确定：$\widetilde{b}$ 是自伴核算子的充要条件是存在 $\boldsymbol{H}$ 的一个正交基 $(h_n)_{n\geq 1}$，使得

$$\widetilde{b}(h) = \sum_n \lambda_n(h,h_n)h_n,\quad \forall\, h\in\boldsymbol{H},$$

其中 λ_n 是实数，称为 $\widetilde{b}$ 的特征值，并且满足 $\sum_n|\lambda_n|<\infty$.

可以验证，如果 $b\in\boldsymbol{H}\hat{\otimes}_1\boldsymbol{H}$ 与 $\widetilde{b}$ 相联系，则我们有

$$Tr(\widetilde{b}) = \sum_n \lambda_n, \tag{3.2}$$

以及

$$\|\widetilde{b}\|_1 = \sum_n|\lambda_n|. \tag{3.3}$$

公式(3.2)和(3.3)表明每个正的自伴算子 $\widetilde{b}$ 可以表为

$$\widetilde{b} = \widetilde{q}\circ\widetilde{q},\qquad \widetilde{q}\in\mathscr{L}_2(\boldsymbol{H},\boldsymbol{H}),$$

$\widetilde{q}$ 的特征值是 $\widetilde{b}$ 的特征值的平方根. 在这种情况下，我们记 $\widetilde{q} = \widetilde{b}^{1/2}$.

我们记 $\mathscr{L}_1(\boldsymbol{H},\boldsymbol{H})$ 是 $\boldsymbol{H}$ 上的核算子空间.

下面我们叙述一些性质：

(Ⅰ) 如果 $q \in \mathscr{L}_2(\boldsymbol{H},\boldsymbol{H})$，则 $q \circ q \in \mathscr{L}_1(\boldsymbol{H},\boldsymbol{H})$，并且 $\| q \circ q \|_1 = \| q \|_2^2$.

(Ⅱ) 如果 $q \in \mathscr{L}_2(\boldsymbol{H},\boldsymbol{H})$，$u \in \mathscr{L}(\boldsymbol{H},\boldsymbol{H})$，则 $q \circ u \in \mathscr{L}_2(\boldsymbol{H},\boldsymbol{H})$，并且 $\| q \circ u \|_2 \leqslant \| q \|_2 \| u \|$.

(Ⅲ) 如果 $q \in \mathscr{L}_2(\boldsymbol{H},\boldsymbol{H})$（或 $q \in \mathscr{L}_1(\boldsymbol{H},\boldsymbol{H})$），则 q 的对偶算子 $q^* \in \mathscr{L}_2(\boldsymbol{H},\boldsymbol{H})$（或 $q^* \in \mathscr{L}_1(\boldsymbol{H},\boldsymbol{H})$），并且 $\| q^* \|_2 = \| q \|_2$（或 $\| q^* \|_1 = \| q \|_1$）.

记 $\mathscr{L}_1^{+,s}(\boldsymbol{H},\boldsymbol{H})$ 是 $\mathscr{L}_1(\boldsymbol{H},\boldsymbol{H})$ 的正对称元素所组成的空间. $\mathscr{L}_2^{+,s}(\boldsymbol{H},\boldsymbol{H})$ 是 $\boldsymbol{H}$ 上对称正 Hilbert-Schmidt 算子所组成的空间，则按照它们上的子拓扑，从 $\mathscr{L}_1^{+,s}(\boldsymbol{H},\boldsymbol{H})$ 到 $\mathscr{L}_2^{+,s}(\boldsymbol{H},\boldsymbol{H})$ 上的映射

$$q \to q^{1/2}$$

是连续的. 事实上，设 $\{q_n\}_{n\geqslant 1}$ 是 $\mathscr{L}_2^{+,s}(\boldsymbol{H},\boldsymbol{H})$ 中的序列，并且满足 $\lim\limits_{n\to\infty} \| q_n \circ q_n - q \circ q \|_1 = 0$. 因为

$$\| q_n \|_2^2 = \| q_n \circ q_n \|_1, \quad \| q \|_2^2 = \| q \circ q \|_1,$$

所以下式成立：

$$\lim_{n\to\infty} \| q_n \|_2^2 = \| q \|_2^2.$$

为此，我们只要证明在 Hilbert 空间 $\mathscr{L}_2^{+,s}(\boldsymbol{H},\boldsymbol{H})$ 上 q_n 弱收敛于 q. 由 $\sup\limits_n \| q_n \|_2 < \infty$ 知序列 $\{q_n\}_{n\geqslant 1}$ 弱紧，因此有弱极限. 所以我们只要证明：若 q' 是 $\{q_n\}_{n\geqslant 1}$ 的任一极限点，则 $q' = q$.

对任一个 $\varphi \in \mathscr{L}_2(\boldsymbol{H},\boldsymbol{H})$，由定义我们有

$$\lim_{n\to\infty} Tr[(q' - q_n) \cdot \varphi] = 0,$$

所以

$$
\begin{aligned}
&\limsup_{n\to\infty} |Tr[(q_n \circ q_n - q' \circ q') \circ \varphi]| \\
\leqslant &\limsup_{n\to\infty} [|Trq_n \circ (q_n - q') \circ \varphi| + |Tr(q_n - q') \circ q' \circ \varphi|] \\
\leqslant &\limsup_{n\to\infty} [\sup_n \| q_n \|_2 |Tr(q_n - q') \circ \varphi| \\
&+ |Tr(q_n - q') \circ q' \circ \varphi|] \\
= &0.
\end{aligned}
$$

这表明在 $\mathscr{L}_2(\boldsymbol{H},\boldsymbol{H})$ 上，序列 $\{q_n \circ q_n\}_{n\geqslant 1}$ 弱收敛于 $q' \circ q'$. 但在空间 $\mathscr{L}_1(\boldsymbol{H},\boldsymbol{H})$ 上，$\{q_n \circ q_n\}_{n\geqslant 1}$ 收敛于 $q \circ q$，所以在 $\mathscr{L}_2(\boldsymbol{H},\boldsymbol{H})$ 上，我们有 $q' \circ q' = q \circ q$. 由于 q_n 是正的对称元，所以 q' 也是正的对称元，因此，我们有 $q' = q$. 这就表明在 $\mathscr{L}_2(\boldsymbol{H},\boldsymbol{H})$ 上，序列 $\{q_n\}_{n\geqslant 1}$ 收敛于 q.

1.4 Hilbert 空间值半鞅

一、定义及基本性质

1.4.1 定义 设 $(\Omega,\mathscr{F},\mathscr{F}_t,P)$ 是带流的概率空间，$\boldsymbol{H}$ 是可分的实 Hilbert 空间. 取值于 $\boldsymbol{H}$ 的随机过程 M 称为鞅，如果 M 关于 $(\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$ 适应，即对任意的 $t \geqslant 0, M_t \in \mathscr{F}_t, E(\| M_t \|) < \infty$，并且

$$E(M_t | \mathscr{F}_s) = M_s, \qquad \forall\, t \geqslant s \geqslant 0.$$

如果对任意的 $t \geqslant 0, E(\| M_t \|^2) < \infty$，鞅 M 称为是 L^2-鞅；如果 $\sup\limits_{t\geqslant 0} E(\| M_t \|^2) < \infty$，$M$ 称为是平方可积鞅. 设 M 为鞅，如果存在 $(\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$ 的停时列 $T_n \uparrow \infty$，使得 $M^{T_n} = (M_{t\wedge T_n})_{t\geqslant 0}$ 是平方可积鞅，则称 M 是局部平方可积鞅，$\{T_n\}_{n\geqslant 1}$ 称为 M 的局部化停时列.

右连续的 $\boldsymbol{H}$- 值随机过程 X 称为半鞅，如果 X 可分解为

$$X = M + V, \tag{4.1}$$

其中 M 是右连续的 $\boldsymbol{H}$- 值局部可积鞅，V 是右连续的 $\boldsymbol{H}$- 值有限变差过程. 在分解式(4.1)中，如果 M 是右连续的 $\boldsymbol{H}$- 值局部可积鞅，

V 是右连续的局部可积变差过程，则称 X 是特殊半鞅.

以后我们所讨论的随机过程均假设样本轨道是右连左极的.

设 M 是 $\boldsymbol{H}$-值局部平方可积鞅，则 $\|M\|^2$ 是非负的下鞅. 由 Doob-Meyer 分解定理，存在一可料的增过程，记为 $\langle M\rangle$ $(\langle M\rangle_0 = 0)$，使得 $\|M\|^2 - \langle M\rangle$ 是实值局部可积鞅. 令

$$[M]_t = M_0^2 + \langle M^c\rangle_t + \sum_{s\leqslant t}\|\Delta M_s\|^2,$$

其中 M^c 是 M 的连续鞅部分，则$[M]$是$(\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$ 适应的局部可积增过程.

1.4.2 定理 设 M 是 $\boldsymbol{H}$-值局部平方可积鞅，则在 P 等价意义下有下列性质成立：

（Ⅰ）$\|M\|^2 - [M]$ 是局部可积鞅；

（Ⅱ）$\langle M\rangle$ 是$[M]$ 的可料对偶投影；

对任一停时 T，我们有下列关系式成立：

（Ⅲ）$E(\|M_T - M_0\|^2) = E(\langle M\rangle_T) = E([M]_T)$；

（Ⅳ）$E(\sup\limits_{t\leqslant T}\|M_t - M_0\|^2) \leqslant 4E(\langle M\rangle_T) = 4E([M]_T)$；

（Ⅴ）$E(\sup\limits_{t<T}\|M_t - M_0\|^2) \leqslant 4[E(\langle M\rangle_{T-}) + E([\overline{M}]_{T-})]$.

其中$\overline{M} = \sum\limits_n \Delta M_{T_n} I_{[\![T_n,\infty[\![}$，$\{T_n\}_{n\geqslant 1}$ 是一列图互不相交的可料时，并且对任意具有性质 $\sum\limits_n P(T_n = \sigma < \infty) = 0$ 的可料时 σ，我们有 $\|\Delta M_\sigma\| = 0, P - a.s.$

证明 （Ⅰ）～（Ⅳ）的证明同实值情形一样，故略去. 我们只证明（Ⅴ）. 为了方便，假设 $M_0 = 0$.

令 $N = M - \overline{M}$，则 N 的跳跃点只能在不可及时处出现，因此 $\langle N\rangle$ 是连续的. 由 N 和$\overline{M}$ 正交（$N\otimes\overline{M}$ 是 $\boldsymbol{H}\hat{\otimes}_1\boldsymbol{H}$-值局部可积鞅）知$\langle M\rangle = \langle N\rangle + \langle\overline{M}\rangle$.

首先假设 M 是平方可积鞅. 如果我们能证明对任何停时 T，存在一平方可积鞅 W 使得

$$WI_{[\![0,T]\!]} = \overline{M}I_{[\![0,T[\![},\tag{4.2}$$

$$E([W]_T) = E(\langle W\rangle_T) \leqslant E([\overline{M}]_{T-} + \langle \overline{M}\rangle_{T-}),\tag{4.3}$$

$$W \otimes N \text{ 是 } H \hat{\otimes}_1 H\text{- 值鞅},\tag{4.4}$$

则由(4.4)知$\langle W + N\rangle = \langle W\rangle + \langle N\rangle$. 从而由 Doob 不等式(Ⅳ)得

$$\begin{aligned} E(\sup_{t<T} \| M_t \|^2) &= E(\sup_{t<T} \| N_t + W_t \|^2) \\ &\leqslant E(\sup_{t\leqslant T} \| N_t + W_t \|^2) \\ &\leqslant 4E(\langle N\rangle_T + \langle W\rangle_T), \end{aligned}$$

从而由(4.3)及$\langle N\rangle$的连续性可知

$$E\left(\sup_{t<T} \| M \|^2\right) \leqslant 4E(\langle M\rangle_{T-} + [\overline{M}]_{T-}).\tag{4.5}$$

当 M 是局部平方可积鞅时,设$\{S_n\}_{n\geqslant 1}$是 M 的局部化停时列,则对$S_n \wedge T$,有(4.5)成立. 令 $n\to\infty$ 即得对局部平方可积鞅 M 仍有(4.5)成立.

下述性质表明满足(4.2)、(4.3)和(4.4)的平方可积鞅 W 是存在的.

1.4.3 性质 设 M 是平方可积鞅,$\{T_n\}_{n\geqslant 1}$ 为定理 1.4.2(Ⅴ)的可料停时列,令 $M^n = \Delta M_{T_n} I_{[\![T_n,\infty[\![}$,则对每个停时 T,存在一个平方可积鞅序列$\{W^n\}_{n\geqslant 1}$,使得每个W^n均与$N = M - \overline{M}$ 正交,$\{W^n\}_{n\geqslant 1}$相互正交,并且有如下性质:

(Ⅰ) 对每个 $n \geqslant 1$,$W^n I_{[\![0,T]\!]} = M^n I_{[\![0,T[\![}$,

(Ⅱ) $E(\langle W^n\rangle_T) = E([W^n]_T) \leqslant E([M^n]_{T-} + \langle M^n\rangle_{T-})$,

(Ⅲ) 在平方可积鞅族$\mathscr{M}^2(H)$中,级数$\sum_n W^n$收敛到鞅W,并且 W 满足(4.2)~(4.4).

证明 记 $A = \{T_n < T\}$,$B = \Omega\backslash A$,定义 $\mathscr{G} = \mathscr{F}_{T_n-}$,$\mathscr{G}^*$ 是由 $\mathscr{G}$ 和 A 生成的 σ- 域,令

$$h = \Delta M_{T_n} I_B - E(\Delta M_{T_n} I_B | \mathscr{G}^*) = I_B(\Delta M_{T_n} - E(\Delta M_{T_n} | \mathscr{G}^*)),$$

(4.6)

由 $E(h|\mathscr{G}^*)=0$ 我们有 $E(h|\mathscr{G})=0$，因此过程 $hI_{[\![T_n,\infty[\![}$ 是平方可积鞅.

如果我们令

$$W^n=(\Delta M_{T_n}-h)I_{[\![T_n,\infty[\![},$$

则 W^n 是平方可积鞅，并且满足(4.2)～(4.4). 事实上，由(4.6)我们有

$$W^n=I_A\Delta M_{T_n}I_{[\![T_n,\infty[\![}+I_BE(\Delta M_{T_n}I_B|\mathscr{G}^*)I_{[\![T_n,\infty[\![}. \qquad (4.7)$$

从而由 B 的定义知(4.2)成立. 又

$$\langle M^n\rangle=E(\|\Delta M_{T_n}\|^2|\mathscr{F}_{T_n-})I_{[\![T_n,\infty[\![}, \qquad (4.8)$$

由 W^n 的定义我们有

$$E([W^n]_T)=E(I_A\|\Delta M_{T_n}\|^2+I_{\{T_n=T\}}\|E(\Delta M_{T_n}|\mathscr{G}^*)\|^2),$$

所以

$$E([W^n]_T)\leqslant E(I_A\|\Delta M_{T_n}\|^2+I_B\|E(\Delta M_{T_n}|\mathscr{G}^*)\|^2). \qquad (4.9)$$

如果我们记 $Z=E(\Delta M_{T_n}|\mathscr{G}^*)$，$a=E(I_A|\mathscr{G})$、$b=E(I_B|\mathscr{G})$. 则 $a+b=1$，并且由 $\mathscr{G}^*$ 的定义知存在 $\mathscr{G}$ 可测的随机变量 ξ 和 η，使得 $Z=I_A\xi+I_B\eta$. 由 $E(Z|\mathscr{G})=E(\Delta M_T|\mathscr{G})=0$ 知 $a\xi+b\eta=0$. 因为 $\|Z\|^2=\|\xi\|^2I_A+\|\eta\|^2I_B$，所以我们有

$$\begin{aligned}E(I_AE(\|Z\|^2|\mathscr{G}))&=E(I_A(a\|\xi\|^2+b\|\eta\|^2))\\&=E(a^2\|\xi\|^2+ab\|\eta\|^2)\\&=E(\|\eta\|^2(b^2+ab))\\&=E(\|\eta\|^2b).\end{aligned} \qquad (4.10)$$

同样地，我们有

$$E(I_B\|Z\|^2)=E(\|\eta\|^2I_B)=E(\|\eta\|^2b). \qquad (4.11)$$

因此，由(4.9)～(4.11)可推得

$$E([W^n]_T)\leqslant E[I_A\|\Delta M_{T_n}\|^2+I_AE(\|Z\|^2|\mathscr{G})]. \qquad (4.12)$$

由(4.8)和 Jensen 不等式得

$$I_A E(\| Z \|^2 | \mathscr{G}) \leqslant E(\| \Delta M_{T_n} \|^2 | \mathscr{G}) = \langle M^n \rangle_{T-},$$

所以由(4.12)得

$$E([W^n]_T) \leqslant E([M^n]_{T-} + \langle M^n \rangle_{T-}). \tag{4.13}$$

由 W^n 的定义可知 W^n 与 N 正交.

$$\sum_n E(\| W^n_\infty \|^2) = \sum_n E(\| W^n_T \|^2)$$
$$\leqslant \sum_n E(\| \Delta M_{T_n} \|^2) < \infty$$

可推得 $\sum_n W^n$ 收敛于平方可积鞅 W. 由 $\{W^n\}_{n\geqslant 1}$ 相互正交知

$$\langle W \rangle = \sum_n \langle W^n \rangle.$$

又 W^n 的跳时的图互不相交可推得 $[W] = \sum_n [W^n]$.

W^n 具有性质(Ⅰ)可推得 W 满足(4.2),而(Ⅱ)可推得(4.3).

这个性质的证明表明定理 1.4.2 得证. 证毕.

设 M 是 $\boldsymbol{H}$- 值平方可积鞅,对任意停时 $S \leqslant T$,令

$$\alpha_M(]\!] S,T]\!]) = E(\| M_T \|^2 - \| M_S \|^2)$$
$$= E(\| M_T - M_S \|^2),$$

$$\mu_M(]\!] S,T]\!]) = E(M_T^{\otimes 2} - M_S^{\otimes 2}) = E[(M_T - M_S)^{\otimes 2}],$$

则 α_M 和 μ_M 可延拓为 $\mathscr{P}$ 上的 σ- 有限测度,记延拓后的测度仍为 α_M 和 μ_M,可以证明

$$\alpha_M = Tr \mu_M$$

和 $\mu_M \ll \alpha_M$. 记 $\boldsymbol{H} \hat{\otimes}_1 \boldsymbol{H}$- 值可料过程 Q_M 为 μ_M 关于 α_M 的 Radon-Nikodym 导数,即

$$\mu_M(G) = \int_G Q_M \mathrm{d}\alpha_M, \quad \forall G \in \mathscr{P},$$

Q_M 取对称正值,并且

$$Tr\, Q_M(\omega,s) = \| Q_M(\omega,s) \|_1 = 1, \quad \alpha_M - a.s.$$

定义

$$《M》=\int_0^t Q_M(\omega,s)\mathrm{d}\langle M\rangle_s,$$

则《M》是 $\boldsymbol{H}\hat{\otimes}_1\boldsymbol{H}$- 值有限变差的可料过程，$\mu_M$ 是它的 Doleans 测度，$M^{\otimes_2}$ − 《M》是 $\boldsymbol{H}\hat{\otimes}_1\boldsymbol{H}$- 值鞅.

又存在 $\boldsymbol{H}\hat{\otimes}_1\boldsymbol{H}$- 值右连左极的有限变差过程，记为 $[\![M]\!]$，在 P 等价的意义下有如下性质：

（Ⅰ）$M^{\otimes_2}-[\![M]\!]$ 是 $\boldsymbol{H}\hat{\otimes}_1\boldsymbol{H}$- 值鞅，

（Ⅱ）《M》是 $[\![M]\!]$ 的可料对偶投影，

（Ⅲ）$$[\![M]\!]_t=《M^c》_t+\sum_{s\leqslant t}(\Delta M_s)^{\otimes_2}$$
$$=[\![M^c]\!]_t+\sum_{s\leqslant t}(\Delta M_s)^{\otimes_2},P\text{-}a.s.$$

对任意的 $t>0$，（Ⅲ）右端的级数是绝对收敛的.

二、H- 值半鞅的特征

1.4.4 定理 设 X 为特殊半鞅，则 X 有如下唯一分解：$X=X_0+M+A$，其中 M 为局部可积鞅，A 为零初值可料有限变差过程. 以后我们称这种分解为特殊半鞅 X 的典则分解.

证明 存在性 设 $X=N+B$ 为 X 的一个分解，其中 N 为局部可积鞅，B 为零初值的局部可积变差过程. 令 $A=B^p$，$M=N+B-B^p$，这里 B^p 为 B 的可料对偶投影，则 M 是局部可积鞅，且 $X=M+A$.

唯一性 设 $X=M'+A'$ 为 X 的另一分解，M' 为局部可积鞅，A' 为局部可积的可料变差过程，则 $A-A'=M'-M$ 是局部可积的可料变差鞅，从而 $A-A'=M-M'=0$，即 $A=A'$，$M=M'$. 证毕.

1.4.5 性质 设 X 是半鞅，则下列叙述等价：

（Ⅰ）X 是特殊半鞅；

（Ⅱ）存在一个分解 $X = X_0 + M + A$，其中 A 局部可积；

（Ⅲ）X 的所有分解 $X = X_0 + M + A$ 均满足 A 是局部可积的变差过程；

（Ⅳ）随机过程 $Y_t = \sup\limits_{s\leqslant t} \| X_s - X_0 \|$ 局部可积.

证明　（Ⅲ）⇒（Ⅰ）显然. 由定义可知（Ⅱ）⇒（Ⅰ）成立.

（Ⅰ）⇒（Ⅳ）如果 A 是局部可积变差过程，则过程 $\sup\limits_{s\leqslant t} \| A_s \|$ 局部可积，同理 A 的全变差过程 $\mathrm{Var}(A)$ 也是局部可积. 因为 $\sup\limits_{s\leqslant \cdot} \| X_s - X_0 \| \leqslant \sup\limits_{s\leqslant \cdot} \| M_s \| + \sup\limits_{s\leqslant \cdot} \| A_s \|$，所以，我们只要证明：如果 M 是局部可积鞅，则 $M_t^* = \sup\limits_{s\leqslant t} \| M_s \|$ 局部可积. 设 $\{T_n\}_{n\geqslant 1}$ 是 M 的局部化停时列，即对任意的 $n \geqslant 1$，M^{T_n} 是可积鞅. 令

$$S_n = \inf\{t: \| M_t \| > n\} \wedge T_n,$$

则 $S_n \uparrow \infty$，并且 $M_{S_n}^* \leqslant n + \| \Delta M_{S_n} \|$. 由 M^{T_n} 为可积鞅知 $M_{S_n}^*$ 可积，因此 M^* 局部可积.

（Ⅳ）⇒（Ⅲ）设 $X = X_0 + M + A$ 为 X 的任一分解，其中 M 为局部可积鞅，A 为有限变差过程. 假设过程 Y 局部可积，而由上述所证知 M^* 局部可积，因此 $A^* = \sup\limits_{s\leqslant \cdot} \| A_s \| \leqslant Y + M^*$ 也局部可积. 因为 $\mathrm{Var}(A) \leqslant \mathrm{Var}(A)_- + 2A^*$，而 $\mathrm{Var}(A)_-$ 局部有界（因为 $\mathrm{Var}(A)_-$ 是左连续的有限增过程）所以 $\mathrm{Var}(A)$ 局部可积. 证毕.

1.4.6　引理　设 X 是 H-值半鞅，如果存在常数 $a > 0$，使得 $\| \Delta X \| \leqslant a$，则 X 是特殊半鞅. 设其典则分解为 $X = X_0 + M + A$，则 $\| \Delta A \| \leqslant a$，$\| \Delta M \| \leqslant 2a$.

证明　令 $T_n = \inf\{t: \| X_t - X_0 \| > n\}$，则 $T_n \uparrow \infty$，并且

$$\sup_{s\leqslant T_n} \| X_s - X_0 \| \leqslant n + \| \Delta X_{T_n} \| \leqslant n + a,$$

从而由性质1.4.5（Ⅳ）知 X 是特殊半鞅. 如果设 $X = X_0 + M + A$

是它的典则分解,则对任意可料时 T

$$\Delta A_T = E(\Delta A_T|\mathscr{F}_{T-}) = E(\Delta X_T - \Delta M_T|\mathscr{F}_{T-}) = E(\Delta X_T|\mathscr{F}_{T-}).$$

从而我们有 $\|\Delta A_T\| \leqslant E(\|\Delta X_T\| |\mathscr{F}_{T-}) \leqslant a$,即 $\|\Delta A\| \leqslant a$. 由此可得 $\|\Delta M\| \leqslant \|\Delta X\| + \|\Delta A\| \leqslant 2a$. 证毕.

1.4.7 定义 映射 $h: \boldsymbol{H} \to \boldsymbol{H}$ 称为截尾函数,如果 h 是有界连续的,并且存在 $b > 0$ 和 $c > 0$,使得 $h(x) = x$, $\|x\| \leqslant a$; $h(x) = 0$, $\|x\| > c$. 记 $\mathscr{C}$ 是 $\boldsymbol{H}$ 上截尾函数的全体.

设 X 是 $\boldsymbol{H}$- 值半鞅,对 $h \in \mathscr{C}$,则 $\Delta X_s - h(\Delta X_s) \neq 0$ 仅当 $\|\Delta X_s\| > b$ 时成立(b 为常数). 定义

$$\begin{cases} \check{X}(h)_t = \sum_{s \leqslant t} [\Delta X_s - h(\Delta X_s)] \\ X(h) = X - \check{X}(h), \end{cases}$$

则 $\check{X}(h)$ 是右连续的有限变差 $\boldsymbol{H}$- 值过程. 因为 $\Delta X(h) = h(\Delta X)$ 有界,所以由引理 1.4.6 知 $X(h)$ 是特殊半鞅. 设其典则分解为

$$X(h) = X_0 + M(h) + B(h),$$

其中 $M(h)$ 是 $\boldsymbol{H}$- 值局部鞅,$B(h)$ 是局部可积的有限变差的可料过程.

1.4.8 定义 固定 $h \in \mathscr{C}$,称三维元组 (B, C, ν) 为 X 关于 h 的可料特征,当 h 明确时,称为 X 的可料特征,如果

(Ⅰ) $B = B(h)$;

(Ⅱ) C 是 $\boldsymbol{H} \hat{\otimes}_1 \boldsymbol{H}$- 值连续过程,$C_t - C_s (t > s)$ 取 $\boldsymbol{H} \hat{\otimes}_1 \boldsymbol{H}$ 的正定对称值,即 $C = 《X^c》$,这里 X^c 是 X 的连续鞅部分.

(Ⅲ) ν 是 $\mathscr{B}_+ \times \mathscr{B}(\boldsymbol{H})$ 上的可料随机测度,它是 X 的跳测度

$$\mu^X(\mathrm{d}t, \mathrm{d}x) = \sum_{s > 0} I_{\{\Delta X_s \neq 0\}} \varepsilon_{(s, \Delta X_s)}(\mathrm{d}t, \mathrm{d}x)$$

的可料对偶投影.

注 由定义可知 C 和 ν 均与截尾函数 h 无关,而 $B = B(h)$ 与

h 有关.

因为 $\Delta X(h)$ 有界,所以由引理 1.4.6 知 $\Delta M(h)$ 也有界,因此 $M(h)$ 是局部平方可积鞅. 从而《$M(h)$》存在,记为 $\widetilde{C}$ = 《$M(h)$》,称为 X 的与 h 联系的修正第二特征.

1.4.9 性质 除去一个不足道集,我们有

$$\widetilde{C} = C + h^{\otimes_2}.\upsilon - \sum_{s\leqslant \cdot}\left(\int_H h(x)\upsilon(\{s\}\times dx)\right)^{\otimes_2}$$
$$= C + h^{\otimes_2}.\upsilon - \sum_{s\leqslant \cdot}(\Delta B_s)^{\otimes_2}. \tag{4.14}$$

证明 设 $\{e_n\}_{n\geqslant 1}$ 为 $\boldsymbol{H}$ 的一个标准正交基,则 X 可表示为 $X = \sum_n X^n e_n = \sum_n (X_0^n + M^n(h) + B^n)e_n$. 因为 $\Delta X(h) = \Delta M(h) + \Delta B$,所以对任意可料时 T,$\Delta B_T = E(\Delta X(h)_T|\mathscr{F}_{T-})$,即 $\Delta B = {}^p(\Delta X(h))$. 另一方面,$\Delta X(h) = h(\Delta X)$,所以 ${}^p(\Delta X(h)) = {}^p(h(\Delta X)) = \left(\int_H h(x)\upsilon(\{t\}\times dx)\right)_{t\geqslant 0}$ 与 ΔB 无区别. 又 $\| h^{\otimes_2}(x)\| \leqslant k(\|x\|^2\wedge 1)$,$k>0$ 为常数,而$(\|x\|^2\wedge 1).\upsilon$ 局部可积,由 $\sum_{s\leqslant \cdot}(\Delta B_s)^{\otimes_2} = [\![B]\!]$ 知(4.14)的右端有意义. 由上所证,我们也有 $h^{\otimes_2}.\mu^X$ 局部可积.

记 $M = M(h) = X(h) - X_0 - B$,容易计算

$$[\![M]\!] = [\![X(h)]\!] - [\![B]\!] - [\![M,B]\!] - [\![B,M]\!].$$

由 Yoeurp 引理知 $[\![M,B]\!]$、$[\![B,M]\!]$ 均为局部可积鞅,从而我们有

$$《M》 = [\![X(h)]\!]^p - [\![B]\!]$$

而

$$[\![X(h)]\!] = C + \sum_{s\leqslant \cdot}[\Delta X(h)]^{\otimes_2} = C + h^{\otimes_2}.\mu^X.$$

由 υ 的定义及 $h^{\otimes_2}.\mu^X$ 局部可积知(4.14)成立. 证毕.

1.4.10 性质 设$h,h_1 \in \mathscr{C}$,则在除去一个不知道集上,我们有

$$B(h) - B(h_1) = (h - h_1).\nu, \tag{4.15}$$

$$\widetilde{C}(h) - \widetilde{C}(h_1) = (h^{\otimes_2} - h_1^{\otimes_2}).\nu - \sum_{s\leqslant\cdot}\left[\int_H h(x)\nu(\{s\}\times \mathrm{d}x)\right]^{\otimes_2} + \sum_{s\leqslant\cdot}\left[\int_H h_1(x)\nu(\{s\}\times \mathrm{d}x)\right]^{\otimes_2}. \tag{4.16}$$

证明 注意到$X(h) - X(h_1) = \check{X}(h) - \check{X}(h_1)$是有限变差过程,且其跳幅有界,因此其可料对偶投影是局部可积.又由μ^X的定义,我们有

$$X(h) - X(h_1) = (h - h_1).\mu^X.$$

因为$(h - h_1).\nu$是有限变差过程及$X(h) - X(h_1) - (h - h_1).\nu$是局部可积鞅,所以由特殊半鞅$X(h) - X(h_1)$分解的唯一性知(4.15)成立.

由性质1.4.9容易证明(4.16)成立.证毕.

1.4.11 定义 H-值半鞅X称为局部平方可积半鞅,如果X是特殊半鞅,其典则分解$X = X_0 + M + A$满足:M是局部平方可积鞅.

1.4.12 引理 半鞅X是局部平方可积的充要条件是增过程$Y_t = \sup\limits_{s\leqslant t}\|X_s - X_0\|^2$局部可积.

证明 假设X是局部平方可积半鞅,$X = X_0 + M + A$是其典则分解,则我们有

$$Y_t \leqslant 2\sup_{s\leqslant t}\|M_s\|^2 + 2\sup_{s\leqslant t}\|A_s\|^2.$$

记$B = [\mathrm{Var}(A)]^2$,则B是可料增过程.令$T_n = \inf\{t \geqslant 0 : B_t \geqslant n\}$,则$T_n$是可料停时,从而存在停时列$\{S_{n,p}\}_{p\geqslant 1}$,使得$S_{n,p} \leqslant S_{n,p+1} < T_n$,$\lim\limits_{p\to\infty} S_{n,p} = T_n$,因此存在$p_n \geqslant 1$,使得$P(S_{n,p_n} < T_{n-1}) \leqslant 2^{-n}$.再令$S_n = \sup\limits_{m\leqslant n} S_{m,p_m}$,我们有$S_n < \sup\limits_{m\leqslant n} T_m = T_n$, $a.s.$,因此$B_{S_n} \leqslant n$,

a. s. 另一方面由 $T_n \uparrow \infty$ 我们容易证明 $S_n \uparrow \infty$, a. s. ，即 B 是局部可积的，从而 $(\sup_{s\leqslant t} \| A_s \|^2)_{t\geqslant 0}$ 也局部可积. 再由 M 是局部平方可积鞅易证 $(\sup_{s\leqslant t} \| M_s \|^2)_{t\geqslant 0}$ 局部可积，故得 Y 是局部可积.

相反地，假设 Y 局部可积，从而由性质 1.4.5 知 X 是特殊半鞅，设其典则分解为 $X = X_0 + N + A$. 如果停时列 $T_n \uparrow \infty$ 使得 $E(Y_{T_n}) < \infty$ 和 $[\mathrm{Var}(A)_{T_n}]^2 \leqslant n$，则

$$\sup_s \| N_s^{T_n} \|^2 = \sup_{s\leqslant T_n} \| N_s \|^2 \leqslant 2Y_{T_n} + 2[\mathrm{Var}(A)_{T_n}]^2$$

可积，即 N^{T_n} 是平方可积鞅. 证毕.

1.4.13 性质 设 X 是半鞅，$(B(h),C,\nu)$ 是 X 与 $h \in \mathscr{C}$ 联系的可料特征.

（Ⅰ）X 是特殊半鞅的充要条件是 $(\| x \|^2 \wedge \| x \|).\nu$ 局部可积. 在这种情况下，典则分解 $X = X_0 + N + A$ 满足：

$$\begin{cases} A = B(h) + (x - h(x)).\nu \\ \Delta A_t = \int_H x\nu(\{t\} \times \mathrm{d}x). \end{cases} \tag{4.17}$$

（Ⅱ）X 是局部平方可积半鞅的充要条件是 $\| x \|^2.\nu$ 局部可积. 这时典则分解 $X = X_0 + N + A$ 满足(4.17)和

$$\begin{aligned} \langle\!\langle N,N \rangle\!\rangle &= C + x^{\otimes_2}.\nu - \sum_{s\leqslant \cdot} \left[\int_H x\nu(\{s\} \times \mathrm{d}x)\right]^{\otimes_2} \\ &= C + x^{\otimes_2}.\nu - \sum_{s\leqslant \cdot} (\Delta A_s)^{\otimes_2}. \end{aligned} \tag{4.18}$$

证明 （Ⅰ）因为 $X(h)$ 是特殊半鞅，所以 X 为特殊半鞅的充要条件是 $\check{X}(h)$ 是特殊半鞅. 由于 $\check{X}(h)$ 是有限变差过程，所以由性质 1.4.5 我们只要证明 $\check{X}(h)$ 局部可积. 由定义 $\check{X}(h) = (x - h(x)).\mu^X$，因此我们只要证明 $\| x - h(x) \|.\nu$ 局部可积. 由 h 的定义知存在常数 c 使得

$$\| x - h(x) \| \leqslant c(\| x \|^2 \wedge \| x \|)$$

以及

$$\|x\|^2 \wedge \|x\| \leqslant c[\|x - h(x)\| + \|x\|^2 \wedge 1]. \quad (4.19)$$

若$(\|x\|^2 \wedge \|x\|).\nu$局部可积，则$\|x - h(x)\|.\nu$局部可积，从而可知$\check{X}(h)$是特殊半鞅.

反之，令

$$Y_t = X_t - X_0 - \int_0^t \int_{\|x\|>1} x\mu^X(\mathrm{d}s, \mathrm{d}x), \qquad t \geqslant 0$$

则$\|\Delta Y\| \leqslant 1$，从而Y是特殊半鞅. 由于对任意的$t > 0$，

$$\int_0^t \int_{\|x\|\leqslant 1} \|x\|^2 \mathrm{d}\mu^X = \sum_{s\leqslant t} \|\Delta X_s\|^2 I_{(\|\Delta X_s\|\leqslant 1)}$$
$$= \sum_{s\leqslant t} \|\Delta Y_s\|^2 < \infty.$$

性质1.4.5可推得$\sum\limits_{s\leqslant \cdot} \|\Delta Y_s\|^2$局部可积，从而$\int_0^\cdot \int_{\|x\|\leqslant 1} \|x\|^2 \mathrm{d}\nu$局部可积. 另一方面，由$\mu^X$的定义知$\int_0^\cdot \int_{\|x\|>1} \mathrm{d}\mu^X$局部可积是显然的，所以$\int_0^\cdot \int_{\|x\|>1} \mathrm{d}\nu$局部可积. 综上所证知$[\|x\|^2 \wedge 1].\nu$局部可积.

如果假设$\|x - h(x)\|.\nu$局部可积，则由上述所证及(4.19)知$(\|x\|^2 \wedge \|x\|).\nu$局部可积.

如果$X = X_0 + N + A$是X的典则分解，则我们有

$$\check{X}(h) = N + A - M(h) - B(h).$$

这表明$A - B(h)$是$\check{X}(h) = (x - h(x)).\mu^X$的可料对偶投影，即(4.17)的第一个等式成立.

由性质1.4.9的证明知$\Delta B(h)_t = \int_E h(x)\nu(\{t\} \times \mathrm{d}x)$，从而我们有

$$\Delta A_t = \Delta B(h)_t + \int_E (x - h(x))\nu(\{t\} \times \mathrm{d}x)$$
$$= \int_E x\nu(\{t\} \times \mathrm{d}x),$$

即(4.17)的第二个等式成立.

(Ⅱ) 假设 $\|x\|^2.\nu$ 局部可积,则由(Ⅰ)知 X 是特殊半鞅. 设其典则分解为 $X = X_0 + N + A$,由假设知(4.18)的右端有意义,并由(4.17)知它们相等. 对 N 和 A 分别应用性质 1.4.9 容易计算

$$[\![N]\!] = C + x^{\otimes_2}.\mu^X - [\![A]\!] - [\![A,N]\!]$$
$$- [\![N,A]\!]. \qquad (4.20)$$

由假设及 $[\![A]\!]$ 的可料性可知 C、$[\![A]\!]$ 及 $x^{\otimes_2}.\mu^X$ 均为局部可积. Yoeurp 引理知 $[\![A,N]\!]$ 和 $[\![N,A]\!]$ 均为局部可积的有限变差鞅. 因此 $[\![N]\!]$ 局部可积,从而 N 是局部平方可积鞅. 这表明 X 是局部平方可积的半鞅,且

$$\langle\!\langle N \rangle\!\rangle = [\![N]\!]^p = C + x^{\otimes_2}.\nu - [\![A]\!],$$

即(4.18)成立.

相反地,假设 X 是局部平方可积半鞅,则 $[\![N]\!]$ 局部可积. (4.20)可推得 $x^{\otimes_2}.\mu^X$ 局部可积,从而有 $x^{\otimes_2}.\nu$ 局部可积,由此即得 $\|x\|^2.\nu$ 局部可积. 证毕.

三、独立增量的 Hilbert 空间值半鞅

1.4.14 定义 a) 空间$(\Omega,\mathscr{F},\mathscr{F}_t,P)$上的 $\boldsymbol{H}$-值随机过程 X 称为是独立增量的,如果 $X_0 = 0$,并且对任意的 $0 \leqslant s < t$,随机变量 $X_t - X_s$ 与 $\mathscr{F}_s$ 独立.

b) 空间$(\Omega,\mathscr{F},\mathscr{F}_t,P)$上的 $\boldsymbol{H}$-值随机过程 X 称为是平稳独立增量的,如果 X 是独立增量,并且随机变量 $X_t - X_s$ 的分布只与 $t - s$ 有关.

c) 时间 $t \geqslant 0$ 称为 X 的固定不连续点,如果 $P(\Delta X_t \neq 0) > 0$.

因为我们所研究的都是右连左极过程,所以过程的不连续点至多可数个. 当 X 是平稳独立增量过程时,随机变量 $\Delta X_t = \lim\limits_{s\uparrow\uparrow t}(X_t - X_s)$ 的分布不依赖于 t,因此 X 没有固定不连续点.

类似于有限维空间上的 *Itô* 公式,我们有如下定理:

1.4.15 定理 (无限维变换公式) 设 $\boldsymbol{H}$ 和 $\boldsymbol{G}$ 均为实可分

的 Hilbert 空间，X 是 $\boldsymbol{H}$- 值半鞅，φ 是从 $\boldsymbol{H}$ 到 $\boldsymbol{G}$ 的具有一阶导数 φ' 和二阶导数 φ'' 的连续映射，又假设对任意的 $x \in \boldsymbol{H}$，$\varphi''(x) \in \mathscr{L}(\boldsymbol{H} \hat{\otimes}_2 \boldsymbol{H}, \boldsymbol{G})$，而且在 $\boldsymbol{H}$ 的任一有界子集上 $x \to \varphi''(x)$ 一致连续，则随机过程 $\varphi(X)$ 是 $\boldsymbol{G}$- 值半鞅，并且在 P 等价意义下，我们有

$$\varphi(X_t) = \varphi(X_0) + \int_0^t \varphi'(X_{s-})\mathrm{d}X_s + \frac{1}{2}\int_0^t \varphi''(X_{s-})\mathrm{d}[\![X]\!]_s$$
$$+ \sum_{s \leqslant t} [\varphi(X_s) - \varphi(X_{s-}) - \varphi'(X_{s-})\Delta X_s$$
$$- \frac{1}{2}\varphi''(X_{s-})(\Delta X_s)^{\otimes 2}]. \tag{4.20}$$

我们也有

$$\varphi(X_t) = \varphi(X_0) + \int_0^t \varphi'(X_{s-})\mathrm{d}X_s + \frac{1}{2}\int_0^t \varphi''(X_{s-})\mathrm{d}[\![X^c]\!]_s$$
$$+ \sum_{s \leqslant t} [\varphi(X_s) - \varphi(X_{s-}) - \varphi'(X_{s-})\Delta X_s]. \tag{4.21}$$

在上述公式中 $\sum$ 下的 $\boldsymbol{G}$- 值随机变量是 a.s. 收敛.

证明　请参见[25] 的定理 27.2 的证明.

1.4.16　定理　(Doléans-Dade 指数公式)　设 X 是实值半鞅，令

$$V_t = \prod_{0<s\leqslant t}(1 + \Delta X_s)e^{-\Delta X_s}, \quad (V_0 = 1), \tag{4.22}$$

则对于每个 $\omega \in \Omega$，(4.22) 右端所定义的无穷乘积对每个固定的 $t > 0$ 是绝对收敛的，并且 $V = (V_t)_{t\geqslant 0}$ 是纯断的适应有限变差过程. 令

$$Z_t = \exp\left\{X_t - X_0 - \frac{1}{2}\langle X^c \rangle_t\right\} \prod_{0<s\leqslant t}(1 + \Delta X_s)e^{-\Delta X_s},$$

则 $Z = (Z_t)_{t\geqslant 0}$ 是随机积分方程

$$Z_t = 1 + \int_0^t Z_{s-}\mathrm{d}X_s$$

的唯一解，以后记 $Z = \mathscr{E}(X)$.

证明　请看[13] 的定理 9.39 的证明.

1.4.17 定理 设 X 是 $\boldsymbol{R}^d$- 值半鞅，$X_0=0$，则 X 是独立增量过程的充要条件是 X 的可料特征有非随机的版本 (B,C,ν).

证明　请看[16]的定理 Ⅱ-4.15 的证明.

对于无穷维半鞅，我们也有类似的结论.

1.4.18 定理 设 X 是 $\boldsymbol{H}$- 值半鞅，$X_0=0$，则 X 是独立增量过程的充要条件是 X 的可料特征有非随机的版本 (B,C,ν).

在这种情况下，X 的固定不连续点集是 $J=\{t:\nu(\{t\}\times\boldsymbol{H})>0\}$，并且对所有的 $s\leqslant t,u\in\boldsymbol{H}$，我们有

$$
\begin{aligned}
&E(\exp\{iu\cdot(X_t-X_s)\}) \\
&=\exp\Big[iu\cdot(B_t-B_s)-\frac{1}{2}(C_t-C_s)\cdot u^{\otimes 2} \\
&\quad+\int_s^t\int_{\boldsymbol{H}}(e^{iu\cdot x}-1-iu\cdot h(x)I_{J^c}(r)\nu(\mathrm{d}r,\mathrm{d}x)\Big] \\
&\quad\times\prod_{s<r\leqslant t}\Big\{e^{-iu\cdot\Delta B_r}\Big[1+\int_{\boldsymbol{H}}(e^{iu\cdot x}-1)\nu(\{r\}\times\mathrm{d}x)\Big]\Big\}.
\end{aligned}
\tag{4.23}
$$

特别地，随机变量 ΔX_t 的分布为

$$
\nu(\{t\}\times\mathrm{d}x)+[1-\nu(\{t\}\times\boldsymbol{H})]\varepsilon_0(\mathrm{d}x). \tag{4.24}
$$

证明　必要性　假设 X 是独立增量过程，$\{e_n\}_{n\geqslant1}$ 为 $\boldsymbol{H}$ 的一个标准正交基，则对任意的 $x\in\boldsymbol{H}$，我们有 $x=\sum_{n=1}^{\infty}x_ne_n$. 如果我们定义 $\boldsymbol{H}$ 到 $\boldsymbol{R}^n$ 的映射 Π_n 为

$$
\Pi_n:x\to(x_1,x_2,\cdots,x_n)
$$

及 $\boldsymbol{R}_n$ 到 $\boldsymbol{H}$ 的映射 V_n 为

$$
V_n:(x_1,x_2,\cdots,x_n)\to\sum_{i=1}^{n}x_ie_i,
$$

则我们有

$$
\|x-V_n\circ\Pi_nx\|\to0,\quad\forall\,x\in\boldsymbol{H}.
$$

取 $h_0\in\mathscr{C}$ 满足条件：h_0 在基 $\{e_n\}_{n\geqslant1}$ 下的第 n 个分量只是 x 在基 $\{e_n\}_{n\geqslant1}$ 下第 n 个分量的函数，则对每个 $n\geqslant1$，Π_nh_0 为 $\boldsymbol{R}^n$ 上的截

尾函数，并且 $\Pi_n h_0(\Pi_n x) = \Pi_n h_0(x)$. 设 X 关于截尾函数 h_0 的可料特征为 $(B(h_0), C, \nu)$.

对每个 $n \geqslant 1$，定义

$$X^n = \Pi_n X,\ B^n(h_0) = \Pi_n B(h_0),\quad C^n = \langle\langle X^{nc} \rangle\rangle$$

和

$$\nu^n(\mathrm{d}t, \mathrm{d}x) = \nu(\mathrm{d}t, V_n \circ \Pi_n \mathrm{d}x),$$

则 $(B^n(h_0), C^n, \nu^n)$ 是 X^n 关于截尾函数 $\Pi_n h_0$ 的可料特征. 因为 X 为独立增量过程，所以 X^n 亦是独立增量过程，从而由定理 1.4.17 知 $(B^n(h_0), C^n, \nu^n)$ 非随机，即 $B^n(h_0)$ 和 C^n 非随机. 由 $n \geqslant 1$ 的任意性知 $B(h_0)$ 和 C 均非随机. 另一方面，由 X 独立增量性可推得其跳测度为 Poisson 随机测度. 因此，其可料对偶投影为非随机的测度. 又对任意的 $h \in \mathscr{C}$，由性质 1.4.10，我们有

$$B(h) = B(h_0) + (h - h_0).\nu,$$

从而由 $B(h_0)$ 及 ν 非随机可推得 $B(h)$ 非随机，故对每个 $h \in \mathscr{C}$，X 的可料特征 $(B(h), C, \nu)$ 非随机.

充分性　取 $h \in \mathscr{C}$，假设 $X(X_0 = 0)$ 关于 h 的可料特征 $(B(h), C, \nu)$ 非随机. 令

$$A(u)_t = iu \cdot B(h)_t - \frac{1}{2} C_t \cdot u^{\otimes 2} + \int_H (e^{iu \cdot x} - 1 - iu \cdot h(x)) \nu([0,t] \times \mathrm{d}x),\quad u \in H,$$

则 $A(u)$ 是非随机. 设 $f(x) = e^{iu \cdot x}$，利用定理 1.4.15，我们可知 $M(u) = e^{iu \cdot X} - e^{iu \cdot X_-}.A(u)$ 是局部可积鞅. 因为

$$|M(u)_t| \leqslant 1 + \mathrm{Var}[A(u)]_t,$$

所以 $M(u)$ 是鞅.

对任意固定的 $s \geqslant 0$ 及 $F \in \mathscr{F}_s$，$P(F) > 0$，则对 $t \geqslant s$，由定理 1.4.15 我们有

$$I_F e^{iu \cdot (X_t - X_s)} = I_F + I_F e^{-iu \cdot X_s} [M(u)_t - M(u)_s] + \int_s^t I_F e^{iu \cdot (X_r - X_s)} \mathrm{d}A(u)_r. \tag{4.25}$$

如果我们定义

$$f(t)=\begin{cases}E[I_F\exp\{iu\cdot(X_t-X_s)\}]/P(F), & \text{如果 } t\geqslant s,\\ 1, & \text{如果 } t<s.\end{cases}$$

则由 $A(u)$ 非随机，对(4.25)两边取数学期望，并利用 Fubini 定理我们有

$$f(t)=1+\int_0^t f(r-)\mathrm{d}[A(u)-A(u)^s](r),$$

其中 $A(u)_r^s=A(u)_{r\wedge s}$. 因此由定理 1.4.16 知 $f(t)=\mathscr{E}[A(u)-A(u)^s]_t$. 所以对 $t\geqslant s$,

$$E[I_F e^{iu\cdot(X_t-X_s)}]=P(F)\mathscr{E}[A(u)-A(u)^s]_t, \tag{4.26}$$

(4.26) 对所有的 $F\in\mathscr{F}_s$ 成立，这表明 X_t-X_s 与 $\mathscr{F}_s$ 独立. 因为 $A(u)-A(u)^s$ 是有限变差函数，所以由定理 1.4.16 知 $\mathscr{E}[A(u)-A(u)^s]$ 就是(4.23)，从而由(4.26)知(4.23)成立.

在(4.23)中，令 $s\uparrow\uparrow t$ 我们有

$$E(\exp\{iu\cdot\Delta X_t\})=1+\int_H(e^{iu\cdot x}-1)\nu(\{t\}\times \mathrm{d}x), \tag{4.27}$$

对所有 $u\in\boldsymbol{H}$,(4.27)右端等于1的充要条件是 $\nu(\{t\}\times\mathrm{d}x)=0$. 因此集合 $\{t\geqslant 0;\nu(\{t\}\times\mathrm{d}x)>0\}$ 是 X 的固定不连续点，并且由(4.27)我们可推得(4.24)成立. 定理证毕.

2

Skorokhod 拓扑

在本章中，我们在右连左极函数空间 $D(H)$ 上建立了 Skorokhod 拓扑，为以后讨论随机过程序列的极限定理奠定基础. 本章取材于[21,35,40,42,48].

2.1 定义和记号

2.1.1 定义 Ⅰ） 记 $D(H)$ 是所有右连左极函数 $\alpha: R_+ \to H$ 的函数空间，称其为 Skorokhod 空间.

Ⅱ）如果 $\alpha \in D(H)$，记 $\alpha(t)$ 为 α 在 t 处的值，$\alpha(t-)$ 为 α 在 t 处的左极限（规定 $\alpha(0-) = \alpha(0)$），$\Delta\alpha(t) = \alpha(t) - \alpha(t-)$.

对于 $\alpha \in D(H)$，定义

$$w(\alpha;I) = \sup_{s,t \in I} \| \alpha(t) - \alpha(s) \| ,$$

其中 I 为 R_+ 的一个子区间；对任意的 $\theta > 0, N > 0$，定义

$$w_N(\alpha,\theta) = \sup\{w(\alpha;[t,t+\theta]);0 \leqslant t \leqslant t+\theta \leqslant N\},$$

$$w'_N(\alpha,\theta) = \inf\{\max_{i \leqslant r} w(\alpha;[t_{i-1},t_i));0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_r$$

$$= N, \inf_{i<r}(t_i - t_{i-1}) \geqslant \theta \Big\}. \tag{1.1}$$

对于 $\alpha \in \boldsymbol{D}(\boldsymbol{H})$，下述结论是显然的：

(Ⅰ) $\theta \to w'_N(\alpha,\theta)$ 和 $N \to w'_N(\alpha,\theta)$ 都是单调增函数；

(Ⅱ) $w'_N(\alpha,\theta) \leqslant w_N(\alpha,2\theta)$.

2.1.2 引理 函数 $\alpha: \boldsymbol{R}_+ \to \boldsymbol{H}$ 属于 $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{H})$ 的充要条件是：对于任意的 $N > 0$，下列条件成立：

(Ⅰ) $\sup_{s \leqslant N} \| \alpha(s) \| < \infty$,

(Ⅱ) $\lim_{\theta \to 0} w'_N(\alpha,\theta) = 0$.

证明 a) 设 α 是右连左极的、$\varepsilon > 0$ 和 $N > 0$，因为 $\| \alpha(s) \|$ 是右连左极的非负函数，所以(Ⅰ)显然成立. 令 $s_0 = 0, \cdots, s_{n+1} = \inf\{t > s_n: \| \alpha(t) - \alpha(s_n) \| > \frac{\varepsilon}{2}\}$，则当 $n \uparrow \infty$ 时，$s_n \uparrow \infty$，因此存在 $p \in N$，使得 $s_p \leqslant N < s_{p+1}$. 由 $\{s_n\}_{n\geqslant 1}$ 的构造可知 $w(\alpha;[s_i, s_{i+1})) \leqslant \varepsilon$，故当 $\theta \leqslant \inf_{i \leqslant p}(s_i - s_{i-1})$ 时，$w'_N(\alpha,\theta) \leqslant \varepsilon$，即(Ⅱ)成立.

b) 用反证法. 假设对于任意 $N > 0$，条件(Ⅰ)和(Ⅱ)成立. 如果 α 不是右连左极的，则存在 $t \in \boldsymbol{R}_+$ 和 $n \in \boldsymbol{N}$，使得 α 的第 n 个坐标 α^n 或者(1)在 t 处没有左极限，或者(2)在 t 处不是右连续.

在情形(1)下，或者 $\lim_{s \uparrow t} |\alpha^n(s)| = \infty$，这与条件(Ⅰ)相矛盾；或者 $a = \liminf_{s \uparrow t} \alpha^n(s) < \limsup_{s \uparrow t} \alpha^n(s) = b$，在这种情况下，当 $n > t$ 时，对任意的 $\theta > 0$，都有 $w'_N(\alpha,\theta) \geqslant b - a > 0$，这与条件(Ⅱ)矛盾.

在情形(2)下，或者是 $a = \limsup_{s \downarrow t} \alpha^n(s) > \alpha^n(t) = b$，或者是 $b > \liminf_{s \downarrow t} \alpha^n(s) = c$，则对任意满足条件 $0 \leqslant u \leqslant t < v$ 的 u 和 v，都有 $w(\alpha;[u,v)) \geqslant a - b$(或者 $b - c$)，因此对任意 $N > t, \theta > 0$，都有 $w'_N(\alpha,\theta) \geqslant a - b$(或者 $b - c$)，这也与条件(Ⅱ)矛盾. 证毕.

2.1.3 性质 设 $\alpha \in \boldsymbol{D}(\boldsymbol{H})$，则对任意的 $\varepsilon > 0, N > 0$，存在

$n \in \boldsymbol{N}$，使得

$$\sup_{s \leqslant N} \| \alpha(s) - V_n \Pi_n \alpha(s) \| \leqslant \varepsilon. \tag{1.2}$$

证明　假设(1.2)不成立，则存在$\boldsymbol{R}_+$的一个子序列$\{t_n\}_{n \geqslant 1}$，$t_n \leqslant N$和$\varepsilon_0 > 0$，使得

$$\| \alpha(t_n) - V_n \Pi_n \alpha(t_n) \| \geqslant \varepsilon_0, \quad \forall\, n \geqslant 1. \tag{1.3}$$

不失一般性，我们假设$t_n \to t, n \to \infty$.

a)　当$t_n > t$时(如果必要的话，我们可以取$\{t_n\}_{n \geqslant 1}$的子序列)，因为α是右连续的，所以

$$\| \alpha(t_n) - \alpha(t) \| \to 0, n \to \infty. \tag{1.4}$$

但是

$$\begin{aligned} & \| \alpha(t_n) - \alpha(t) \| \\ \geqslant & \| \alpha(t_n) - V_n \Pi_n \alpha(t_n) \| - \| V_n \Pi_n [\alpha(t_n) - \alpha(t)] \| \\ & - \| \alpha(t) - V_n \Pi_n \alpha(t) \| \\ \geqslant & \| \alpha(t_n) - V_n \Pi_n \alpha(t_n) \| - \| \alpha(t_n) - \alpha(t) \| \\ & - \| \alpha(t) - V_n \Pi_n \alpha(t) \|, \end{aligned}$$

因此，

$$\| \alpha(t_n) - \alpha(t) \| \geqslant \frac{\varepsilon_0}{2} - \frac{1}{2} \| \alpha(t) - V_n \Pi_n \alpha(t) \|.$$

所以$\liminf\limits_{n \to \infty} \| \alpha(t_n) - \alpha(t) \| \geqslant \frac{1}{2}\varepsilon_0$，这与(1.4)矛盾.

b)　当$t_n < t$时，同a)中一样估计可得

$$\| \alpha(t_n) - \alpha(t-) \| \geqslant \frac{1}{2}\varepsilon_0 - \frac{1}{2} \| \alpha(t-) - V_n \Pi_n \alpha(t-) \|,$$

因此$\liminf\limits_{n \to \infty} \| \alpha(t_n) - \alpha(t-) \| \geqslant \frac{1}{2}\varepsilon_0$，这与$\alpha$在$t$处存在左极限的假设相矛盾.

2.1.4　引理　设$\alpha: \boldsymbol{R}_+ \to \boldsymbol{H}$，则

$$w'_N(\alpha, \theta) = \inf\Big\{ \max_{i \leqslant r} w(\alpha; [t_{i-1}, t_i)) : 0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_r$$

$= N, 0 \leqslant t_i - t_{i-1} \leqslant 2\theta, i < r, t_r - t_{r-1} \leqslant 2\theta \Big\}$.

证明　取 $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_r = N$，使得 $t_i - t_{i-1} \geqslant \theta$，$i \leqslant r-1$。如果存在 $i \leqslant r$，使得 $t_i - t_{i-1} \geqslant 2\theta$，我们可以把区间 $[t_{i-1}, t_i]$ 分割为 $t_{i-1} = s_i^0 < s_i^1 < \cdots < s_i^p = t_i$，使得 $\theta \leqslant s_i^k - s_i^{k-1} \leqslant 2\theta$，当 $i = r$ 时，$s_i^k - s_i^{k-1} < \theta$ 也是可能出现的，由此 $w(\alpha; [s_i^{k-1}, s_i^k)) \leqslant w(\alpha; [t_{i-1}, t_i))$，比较(1.1)我们即得命题成立.

2.2　Skorokhod 拓扑

设 Λ 是 $\boldsymbol{R}_+$ 上严格单调递增的连续函数 λ 所构成的函数空间，其中 λ 具有性质：$\lambda(0) = 0, \lambda(t) \uparrow \infty, t \uparrow \infty$，我们称 λ 是时间变换.

对于 $N > 0$，我们定义函数 K_N 如下：

$$K_N = \begin{cases} 1, & \text{如果 } t \leqslant N \\ N + 1 - t, & \text{如果 } N \leqslant t < N + 1 \\ 0, & \text{如果 } t \geqslant N + 1. \end{cases}$$

如果 $\lambda \in \Lambda$，记

$$|||\lambda||| = \sup_{s<t} \left| \log \frac{\lambda(t) - \lambda(s)}{t - s} \right|.$$

对于 α、$\beta \in \boldsymbol{D}(\boldsymbol{H})$，定义

$$\begin{cases} \delta_N(\alpha, \beta) = \inf\limits_{\lambda \in \Lambda} \Big\{ \sup\limits_{t \geqslant 0} \| (K_N\alpha)(\lambda(t)) - (K_N\beta)(t) \| + |||\lambda||| \Big\} \\ \delta(\alpha, \beta) = \sum\limits_{N \in \boldsymbol{N}} 2^{-N}(1 \wedge \delta_N(\alpha, \beta)). \end{cases} \tag{2.1}$$

记 $I \in \Lambda$ 是恒等变换，即 $I(t) = t$. 容易证明下列事实：对任意的 λ、$\mu \in \Lambda$，$\alpha, \beta \in \boldsymbol{D}(\boldsymbol{H})$，我们有

$$\begin{cases} |||\lambda||| = |||\lambda^{-1}|||, \quad |||\lambda \circ \mu||| \leqslant |||\lambda||| + |||\mu|||, \\ \sup\limits_{s \leqslant t} |\lambda(s) - s| \leqslant t(e^{|||\lambda|||} - 1), \\ \sup\limits_{s \leqslant t} |\mu \circ (\lambda - I)(s)| \leqslant \sup\limits_{s \leqslant t} |\lambda(s) - s| e^{|||\mu|||}. \end{cases} \tag{2.2}$$

$$\sup_{t \geqslant 0} \| (K_N \alpha) \circ \lambda \circ \mu(t) - (K_N \beta) \circ \mu(t) \|$$
$$= \sup_{t \geqslant 0} \| (K_N \alpha) \circ \lambda(t) - (K_N \beta)(t) \|. \tag{2.3}$$

2.2.1 引理 如果$\delta(\alpha_n, \alpha) \to 0$,则存在函数序列$\{\lambda_n\}_{n \geqslant 1} \subset \Lambda$,使得

$$\begin{cases} (\text{i}) \sup\limits_{t \geqslant 0} |\lambda_n(t) - t| \to 0, n \to \infty, \\ (\text{ii}) \sup\limits_{s \leqslant N} \| \alpha_n \circ \lambda_n(s) - \alpha(s) \| \to 0, n \to \infty, \quad \forall N > 0. \end{cases} \tag{2.4}$$

证明 由假设知对任意的$N \in \boldsymbol{N}$,$\delta_N(\alpha_n, \alpha) \to 0$,因此存在序列$\{\lambda_n^N\}_{n \geqslant 1} \subset \Lambda$,使得

$$a_n^N = |||\lambda_n^N||| + \sup_{t \geqslant 0} \| (K_N \alpha_n) \circ \lambda_n^N(t) - (K_N \alpha)(t) \| \to 0,$$

$n \uparrow \infty$.

所以存在单调递增的数列$\{m_N\}_{N \geqslant 1}$,使得当$n \geqslant m_N$时,$a_n^N \leqslant 1/N$. 令$r_n = \sup\{N : m_N \leqslant n\}$,则$r_n < \infty$,并且当$n \uparrow \infty$时,$r_n \uparrow \infty$,亦有$a_n^{r_n} \leqslant 1/r_n$. 定义

$$\lambda_n(t) = \begin{cases} \lambda_n^{r_n}(t), & \text{如果 } t \leqslant r_n^{1/2}, \\ t + \lambda_n^{r_n}(r_n^{1/2}) - r_n^{1/2}, & \text{如果 } t > r_n^{1/2}, \end{cases}$$

显然有$\lambda_n \in \Lambda$,并且由(2.2)可得

$$\begin{aligned} \sup_{t \geqslant 0} |\lambda_n(t) - t| &= \sup_{t \leqslant r_n^{1/2}} |\lambda_n(t) - t| \\ &\leqslant r_n^{1/2}(\exp\{|||\lambda_n^{r_n}|||\} - 1) \\ &\leqslant r_n^{1/2}(e^{1/r_n} - 1) \to 0, n \to \infty, \end{aligned}$$

即(2.4)(i)成立. 对于任意固定的$N \in \boldsymbol{N}$,取$t \leqslant N$,当n充分大时就有$\lambda_n(t) = \lambda_n^{r_n}(t)$,$K_N \circ \lambda_n(t) = K_N(t) = 1$,因此

$$
\begin{aligned}
&\sup_{t\leqslant N}\|\alpha_n\circ\lambda_n(t)-\alpha(t)\|\\
\leqslant&\sup_{t\geqslant 0}\|(K_N\alpha_n)\circ\lambda_n^{r_n}(t)-(K_N\alpha_n)(t)\|\\
\leqslant& a_n^{r_n}\leqslant\frac{1}{r_n}\to 0,n\to\infty,
\end{aligned}
$$

这表明(2.4)(Ⅱ)成立.证毕.

2.2.2 引理 δ 是 $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{H})$ 上的距离函数.

证明 非负性是显然的.由(2.2)及(2.3)可知 δ 是对称的.往证三角不等式成立,只要对 δ_N 证明即可.设 α、β、$\gamma\in\boldsymbol{D}(\boldsymbol{H})$,记 $a=\delta_N(\alpha,\beta)$,$b=\delta_N(\beta,\gamma)$,对任意的 $\varepsilon>0$,存在 $\lambda,\mu\in\Lambda$,使得

$$
|||\lambda|||+\sup_{t\geqslant 0}\|(K_N\alpha)\circ\lambda(t)-(K_N\beta)(t)\|\leqslant a+\varepsilon
$$

$$
|||\mu|||+\sup_{t\geqslant 0}\|(K_N\beta)\circ\mu(t)-(K_N\gamma)(t)\|\leqslant b+\varepsilon.
$$

因为 $\lambda\circ\mu\in\Lambda$,(2.2)和(2.3)可推得

$$
\begin{aligned}
&|||\lambda\circ\mu|||+\sup_{t\geqslant 0}\|(K_N\alpha)\circ\lambda\circ\mu(t)-(K_N\gamma)(t)\|\\
\leqslant&|||\lambda|||+|||\mu|||+\sup_{t\geqslant 0}\|(K_N\alpha)\circ\lambda\circ\mu(t)-(K_N\beta)\circ\mu(t)\|\\
&+\sup_{t\geqslant 0}\|(K_N\beta)\circ\mu(t)-(K_N\gamma)(t)\|\\
\leqslant& a+b+2\varepsilon
\end{aligned}
$$

由 $\varepsilon>0$ 的任意性即得 $\delta_N(\alpha,\gamma)\leqslant\delta_N(\alpha,\beta)+\delta_N(\beta,\gamma)$.

最后证明 $\delta(\alpha,\beta)=0\Rightarrow\alpha=\beta$.事实上,如果 $\delta(\alpha,\beta)=0$,引理2.2.1表明存在序列 $\{\lambda_n\}_{n\geqslant 1}\subset\Lambda$,使得(2.4)(Ⅰ)成立,并且对任意的 $N\in\boldsymbol{N}$,$\sup_{s\leqslant N}\|\alpha\circ\lambda_n(s)-\beta(s)\|\to 0$,即对任意 $t\geqslant 0$,$\alpha\circ\lambda_n(t)\to\beta(t)$.(2.4)(Ⅰ)表明如果 t 不是 α 的不连续点,则有 $\alpha\circ\lambda_n(t)\to\alpha(t)$,再由 α、β 的右连左极性即得 $\alpha=\beta$.证毕.

2.2.3 定理 在 δ 下,$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{H})$ 是完备的距离空间.

因为证明很长,我们把它略去,有兴趣的读者可参看 J. Jacod 和 A. N. Shiryaev[16] 中的证明.

在 $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{H})$ 上,由距离 δ 所产生的拓扑称为 Skorokhod 拓扑.为了方便,以后我们总认为在 $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{H})$ 上赋 Skorokhod 拓扑,称 $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{H})$

为 Skorokhod 拓扑空间，简称 Skorokhod 空间.

2.2.4 引理 设集合 A 是 $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{H})$ 中的相对紧子集，则下列条件成立：

(Ⅰ) $\sup\limits_{\alpha\in A}\sup\limits_{s\leqslant N}\|\alpha(s)\|<\infty,\quad\forall N>0;$

(Ⅱ) $\lim\limits_{\theta\to\infty}\sup\limits_{\alpha\in A}w'_N(\alpha,\theta)=0,\quad\forall N>0;$

(Ⅲ) 对任意的 $\varepsilon>0$、$N>0$，存在 $n\in\boldsymbol{N}$，使得

$\sup\limits_{\alpha\in A}\sup\limits_{s\leqslant N}\|\alpha(s)-V_n\Pi_n\alpha(s)\|\leqslant\varepsilon.$

证明 设 A 是 $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{H})$ 的相对紧子集，如果条件(Ⅰ)～(Ⅲ)不成立，则存在一个子序列 $\{\alpha_n\}_{n\geqslant1}\subset A$ 和一个整数 N_0，使得

(a) 或者 $\sup\limits_{s\leqslant N_0}\|\alpha_n(s)\|\to\infty,n\to\infty;$

(b) 或者存在 $\varepsilon_0>0$，使得对任意 $\theta>0$，$w'_{N_0}(\alpha_n,\theta)\geqslant\varepsilon_0;$

(c) 或者存在 $\varepsilon_0>0$ 和 $t_n\leqslant N_0$，使得

$\|\alpha_n(t_n)-V_n\Pi_n\alpha_n(t_n)\|\geqslant\varepsilon_0,\quad\forall n\geqslant1.$

因为 A 是相对紧的，所以不妨设 $\{\alpha_n\}_{n\geqslant1}$ 收敛于 $\alpha\in\boldsymbol{D}(\boldsymbol{H})$ (α 未必在 A 中). 由引理 2.2.1，存在序列 $\{\lambda_n\}_{n\geqslant1}\subset\Lambda$，使得(2.4)成立. 因此当 n 充分大时，$\sup\limits_{t\geqslant0}|\lambda_n(t)-t|\leqslant1$. 因为

$$\sup_{s\leqslant N_0}\|\alpha_n(s)\|\leqslant\sup_{s\leqslant N_0+1}\|\alpha(t)\|+\sup_{s\leqslant N_0+1}\|\alpha_n\circ\lambda_n(s)-\alpha(s)\|$$

当 $n\to\infty$ 时，上式右端趋于 $\sup\limits_{s\leqslant N_0+1}\|\alpha(t)\|$，引理 2.1.2 表明(a)不能成立.

其次，由引理 2.1.2 存在 $\theta\in(0,\frac{1}{4})$，使得 $w'_{N_0+1}(\alpha,2\theta)\leqslant\frac{\varepsilon_0}{6}$. 因此，存在序列 $0=s_0<s_1<\cdots<s_p=N_0+1$ 具有性质：当 $i<p$ 时，$s_i-s_{i-1}\geqslant2\theta$，并且 $s_{p-1}\geqslant N_0-\frac{1}{2}$，$w(\alpha;[s_i,s_{i+1}))<\frac{\varepsilon_0}{3}$.

当 n 充分大时，有 $\sup\limits_{t\geqslant0}|\lambda_n(t)-t|\leqslant\frac{\theta}{2}$ 及 $\sup\limits_{s\leqslant N_0+\theta}\|\alpha_n\circ\lambda_n(s)-\alpha(s)\|$

$\leqslant \frac{\varepsilon_0}{6}$；因此，如果定义 $t_i^n = \lambda_n(s_i)$，则当 $i < p$ 时，$t_i^n - t_{i-1}^n \geqslant \theta$，$t_{p-1}^n \geqslant N_0$，并且 $w(\alpha_n;[t_{i-1}^n, t_i^n)) \leqslant \frac{2}{3}\varepsilon_0$，由此即得 $w'_{N_0}(\alpha_n, \theta) \leqslant \frac{2}{3}\varepsilon_0$，此与(b) 矛盾.

最后，如果定义 $t_n = \lambda_n(s_n)$，当 n 充分大时，有 $\sup\limits_{t\geqslant 0} |\lambda_n(t) - t| \leqslant 1$ 而且 $s_n \leqslant N_0 + 1$，因此 $\{s_n\}_{n\geqslant 1}$ 是有界数列，有收敛的子序列. 不失一般性，假设 $s_n \to s$.

1) 假设 $s_n \geqslant s$(如果必要可取 $\{s_n\}_{n\geqslant 1}$ 的子序列)，则

$$\|\alpha(s_n) - \alpha(s)\| \geqslant \varepsilon_0 - 2\sup_{s\leqslant N_0+1}\|\alpha_n \circ \lambda_n(s) - \alpha(s)\| - \|\alpha(s_n) - \alpha(s)\| - \Big(\sum_{k=n+1}^{\infty}[\alpha^k(s)]^2\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

由引理 2.2.1 和 $\alpha(s) \in \boldsymbol{H}$ 即得 $\liminf\limits_{n\to\infty}\|\alpha(s_n) - \alpha(s)\| \geqslant \frac{1}{2}\varepsilon_0$，这与 α 在 s 处右连续矛盾.

2) 假设 $s_n < s$，和 1) 类似估计可得

$$\|\alpha(s_n) - \alpha(s-)\| \geqslant \frac{1}{2}\varepsilon_0 - \sup_{s\leqslant N_0+1}\|\alpha_n \circ \lambda_n(s) - \alpha(s)\| - \frac{1}{2}\Big(\sum_{k=n+1}^{\infty}[\alpha^k(s-)]^2\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

再由引理 2.2.1 及 $\alpha(s-) \in \boldsymbol{H}$ 可得 $\liminf\limits_{n\to\infty}\|\alpha(s_n) - \alpha(s-)\| \geqslant \frac{1}{2}\varepsilon_0$，这与 α 在 s 处存在左极限相矛盾.

综合 1) 和 2) 可知(c) 不成立. 证毕.

为了叙述下一个引理，我们引入一些记号. 设 N, k, n 均为自然数，$\theta > 0$，记 $C_{n,k,\theta}$ 是 $V_n\Pi_n\boldsymbol{H}$ 的有限子集满足条件：集合 $\{x \in \boldsymbol{H}: \|x\| \leqslant \theta, \|x - V_n\Pi_n x\| \leqslant \frac{1}{k}\}$ 中的每一点到 $C_{n,k,\theta}$ 的距离不超过 $\frac{2}{k}$. 设 $\mathscr{A}(N, n, \theta, k)$ 是 $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{H})$ 的有限子集，其中的元素为取值

于 $C_{n,k,\theta}$ 的节梯函数，跳跃点仅在 $\frac{i}{k}$ 处出现($i\leqslant kN$).

2.2.5 引理 设 $k,N\in\boldsymbol{N},k\geqslant 4,\theta>0$. 如果 $\alpha\in\boldsymbol{D}(\boldsymbol{H})$ 满足 $\sup\limits_{s\leqslant N+3}\|\alpha(s)\|\leqslant\theta, w'_{N+3}(\alpha,\frac{1}{k})<\frac{1}{k}$，则存在 $n\in\boldsymbol{N}$ 和 $\beta\in\mathscr{A}(N+3,n,\theta,k)$ 使得 $\delta_M(\alpha,\beta)\leqslant\frac{7}{k}$ 对任意的 $M\leqslant N$ 成立.

证明 因为 $w'_{N+3}(\alpha,\frac{1}{k})<\frac{1}{k}$，存在分割 $0=t_0<t_1<\cdots<t_p=N+3$ 具有性质：当 $i<p$ 时 $t_i-t_{i-1}\geqslant\frac{1}{k}$，并且 $w(\alpha;[t_i,t_{i+1}))\leqslant\frac{1}{k}$. 如果 $t_{p-1}<N+2$，我们总可以加上一点(注意到 $k\geqslant 4$，$N+2+\frac{1}{k}$ 就是其中的一个点)使得 $t_{p-1}\geqslant N+2$.

令 $s_0=0$，对于 $1\leqslant i<p$，取 s_i 是形如 $\frac{j}{k^2}$ 的点使得 $|s_i-t_i|\leqslant\frac{1}{k^2}$，其中 $j=1,2,\cdots,k^2(N+3)$. 因此 $N+1\leqslant s_{p-1}\leqslant N+3$. 定义时间变换 λ 如下：$\lambda(s_i)=t_i,i<p$；在 $[s_i,s_{i+1})(i<p-1)$ 上 λ 是线性的，在 $[s_{p-1},\infty)$ 上 λ 的斜率为 1. 由 s_i 和 t_i 的取法知，当 $i<p$ 时，$|s_i-t_i|\leqslant\frac{1}{k^2},t_i-t_{i-1}\geqslant\frac{1}{k}$. 因为 $k\geqslant 4$，容易计算

$$|||\lambda|||\leqslant-\log\left(1-\frac{2}{k}\right)\leqslant\frac{4}{k}. \tag{2.5}$$

由性质 2.1.3 知存在 $n\in\boldsymbol{N}$，使得 $\sup\limits_{s\leqslant N+3}\|\alpha(s)-V_n\Pi_n\alpha(s)\|\leqslant\frac{1}{k}$. 取 $\beta\in\mathscr{A}(N+3,n,\theta,k)$ 具有性质：在 $[s_i,s_{i+1})(i<p-1)$ 及 $[s_{p-1},\infty)$ 上，β 均为常值，并且满足 $\|\beta(s_i)-\alpha(t_i)\|\leqslant\frac{2}{k^2}$ $(i<p)$. 因为 $w(\alpha;[t_i,t_{i+1}))\leqslant\frac{1}{k}$，我们可推得对任意的 $s\in[s_i,s_{i+1})(i<p)$，$\|\beta(s)-\alpha\circ\lambda(s)\|\leqslant\frac{3}{k}$. 由 $\lambda(t_{p-1})=s_{p-1}\geqslant N$

$+1$ 即可推得

$$\sup_{t\geqslant 0}\|(K_M\beta)(t)-(K_M\alpha)(\lambda(t))\|\leqslant\frac{3}{k},\quad\forall M\leqslant N.\tag{2.6}$$

(2.5) 和(2.6) 即得命题成立. 证毕.

2.2.6 推论 a) 由 δ 所生成的拓扑空间 $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{H})$ 是可分的.

b) 假设子集 A 满足引理 2.2.4 中的条件(Ⅰ)～(Ⅲ),则在由 δ 所生成的拓扑空间中 A 是相对紧的.

证明 a) 任取 $\alpha\in\boldsymbol{D}(\boldsymbol{H}),N\in\boldsymbol{N}$,并且 $N\geqslant 2$. 由引理 2.1.2 存在 $p\in\boldsymbol{N},p\geqslant\sup\limits_{s\leqslant N+3}\|\alpha(s)\|,k\in\boldsymbol{N},k\geqslant N^2$ 使得 $w'_{N+3}\left(\alpha,\frac{1}{k}\right)<\frac{1}{k}$. 引理 2.2.5 表明存在 $\beta\in\mathscr{A}(N+3,n,p,k)$,使得 $\delta_M(\alpha,\beta)<\frac{7}{k}(M\leqslant N)$. 因此

$$\delta(\alpha,\beta)\leqslant\sum_{1\leqslant M\leqslant N}2^{-M}\frac{7}{k}+\sum_{M>N}2^{-M}\leqslant\frac{7N}{k}+2^{-N}\leqslant\frac{7}{N}+2^{-N}.$$

因为 N 可以充分大,所以我们可以推得可数集

$$\mathscr{A}=\bigcup\nolimits_{N,n,p,k\in N}\mathscr{A}(N+3,n,p,k)$$

在 $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{H})$ 中稠密.

b) 假设集合 A 满足条件 2.2.4(Ⅰ)～(Ⅲ). 因为 $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{H})$ 是完备的,要证明 A 是相对紧的,只要证明 A 是完全有界的.

取 $N\in\boldsymbol{N},N\geqslant 2$,由假设条件存在 $n,p,k\in\boldsymbol{N}$,使得对一切 $\alpha\in A,p\geqslant\sup\limits_{s\leqslant N+3}\|\alpha(s)\|,k\geqslant N^2,w'_{N+3}\left(\alpha,\frac{1}{k}\right)\leqslant\frac{1}{k}$, $\sup\limits_{s\leqslant N+3}\|\alpha(s)-V_n\Pi_n\alpha(s)\|\leqslant\frac{1}{k}$,由引理 2.2.5,对任意 $\alpha\in A$,存在 $\beta\in\mathscr{A}(N+3,n,p,k)$,使得 $\delta(\alpha,\beta)\leqslant\frac{7}{N}+2^{-N}$. 换句话说,$A$ 可以被以 $\mathscr{A}(N+3,n,p,k)$ 中点为球心,半径为 $\frac{7}{N}+2^{-N}$ 的所有球覆盖,由 $\mathscr{A}(N+3,n,p,k)$ 的有限性及 N 的任意性即得 A 是完

全有界的. 证毕.

2.2.7 引理 设 α_n、$\alpha \in D(H)$，如果序列 $\{\lambda_n\}_{n\geq 1} \subset \Lambda$ 使得 (2.4) 成立，则 $\delta(\alpha_n, \alpha) \to 0$.

证明 由(2.4)容易推得：$\sup_{t>0} |\lambda_n^{-1}(t) - t| \to 0$ 和 $\sup_{s\leq N} \| \alpha_n(s) - \alpha(\lambda_n^{-1}(s)) \| \to 0$ 对任意的 $N > 0$ 成立，从而更有 $\alpha(\lambda_n^{-1}(t)) \to \alpha(t)$，因此对于任意的 $t \notin J(\alpha) = \{t > 0 : \Delta\alpha(t) \neq 0\}$，$\alpha_n(t) \to \alpha(t)$. 由此可知 α 仅是 $\{\alpha_n\}_{n\geq 1}$ 在 δ 下唯一可能的极限点.

下面只要证明序列 $\{\alpha_n\}_{n\geq 1}$ 是相对紧的. 按照推论2.2.6(b)，我们只要证明 $A \triangleq \{\alpha_n\}_{n\geq 1}$ 满足条件 2.2.4(Ⅰ)～(Ⅲ). 对于任意的 $\varepsilon > 0$ 和 $N > 0$，由引理 2.1.2 和性质 2.1.3 可知存在 $\theta \in (0,1)$ 和 $m \in \boldsymbol{N}$，使得 $\sup_{s\leq N+1} \| \alpha(s) \| < \infty$，$w'_N(\alpha, \theta) \leq \varepsilon$ 和 $\sup_{s\leq N+1} \| \alpha(s) - V_m \Pi_m \alpha(s) \| < \varepsilon$. 而(2.4)表明存在 $n_0 \in \boldsymbol{N}$，使得 $\sup_{t\geq 0} |\lambda_n(t) - t| < 1$ 及 $\sup_{s\leq N+1} \| \alpha_n \circ \lambda_n(s) - \alpha(s) \| \leq \varepsilon$ 对任意的 $n \geq n_0$ 成立，所以

$$\begin{aligned}\sup_{s\leq N} \| \alpha_n(s) \| &\leq \sup_{s\leq N+1} \| \alpha(s) \| + \sup_{s\leq N+1} \| \alpha_n \circ \lambda_n(s) - \alpha(s) \| \\ &\leq \varepsilon + \sup_{s\leq N+1} \| \alpha(s) \|, \quad \forall\, n \geq n_0.\end{aligned}$$

再由引理 2.1.2 可知 $\sup_{s\leq N} \| \alpha_n(s) \| < \infty$，从而 A 满足条件 2.2.4(Ⅰ).

因为 $w'_N(\alpha, \theta) < \varepsilon$，所以存在分割 $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_p = N + 1$ 具有性质 $t_i - t_{i-1} \geq \theta (i < p)$ 及 $w(\alpha; [t_i, t_{i+1})) \leq 2\varepsilon \ (i < p)$. 令 $s_i^n = \lambda_n(t_i)$，则 $s_i^n - s_{i-1}^n \geq \theta/2 \ (i < p)$，且 $s_p^n \geq N$. 由于 $\sup_{s\leq N+1} \| \alpha_n \circ \lambda_n(s) - \alpha(s) \| \leq \varepsilon$ 可知 $w(\alpha; [s_i^n, s_{i+1}^n)) \leq 4\varepsilon \quad (i < p)$，从而可推得 $w'_N(\alpha_n, \theta/2) \leq 4\varepsilon$ 对任意的 $n \geq n_0$ 成立. 又由引理 2.1.2 知 $\lim_{\rho \downarrow 0} \sup_{n\leq n_0} w'_N(\alpha_n, \rho) = 0$，因此存在 $\theta_0 \in (0, \theta/2]$，使得 $\sup_{n\geq 1} w'_N(\alpha_n, \theta_0) \leq 4\varepsilon$，即 A 满足条件 2.2.4(Ⅱ).

由于 $\sup_{s\leq N+1} \| \alpha(s) - V_m \Pi_m \alpha(s) \| < \varepsilon$ 及 $\sup_{t\geq 0} |\lambda_n(t) - t| < 1$，

$\sup_{s\leqslant N+1}\|\alpha_n\circ\lambda_n(s)-\alpha(s)\|\leqslant\varepsilon$ 对 $n\geqslant n_0$ 成立，所以

$$\begin{aligned}&\sup_{s\leqslant N}\|\alpha_n(s)-V_m\Pi_m\alpha_n(s)\|\\ \leqslant&\ 2\sup_{s\leqslant N+1}\|\alpha_n\circ\lambda_n(s)-\alpha(s)\|+\sup_{s\leqslant N+1}\|\alpha(s)-V_m\Pi_m\alpha(s)\|\\ <&\ 3\varepsilon,\quad\forall\, n\geqslant n_0.\end{aligned}$$

又性质 2.1.3 表明 $\lim_{q\to\infty}\sup_{n\leqslant n_0}\sup_{s\leqslant N}\|\alpha_n(s)-V_q\Pi_q\alpha_n(s)\|=0$，因此存在 $m_0>m$ 使得

$$\sup_{n\geqslant1}\sup_{s\leqslant N}\|\alpha_n(s)-V_{m_0}\Pi_{m_0}\alpha_n(s)\|<3\varepsilon.$$

故 A 满足条件 2.2.4(Ⅲ). 证毕.

综合上述结果，我们可以推得下面定理：

2.2.8 定理 a) 在 $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{H})$ 上存在一个拓扑（称之为 Skorokhod 拓扑），使得 $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{H})$ 成为一个 Polish 空间. 在这个拓扑下，序列 $\{\alpha_n\}_{n\geqslant1}$ 收敛到 α 的充要条件是存在 $\{\lambda_n\}_{n\geqslant1}\subset\Lambda$，使得 (2.4) 成立.

b) 集合 $A\subset\boldsymbol{D}(\boldsymbol{H})$ 在 Skorokhod 拓扑下是相对紧的充要条件是 A 满足条件 2.2.4(Ⅰ)～(Ⅲ).

2.2.9 注 对于 $y=\sum_{i,j}\lambda_{ij}e_i\otimes e_j$，我们定义 $\Pi_{m\times m}y=(\lambda_{ij})_{i,j\leqslant m}$ 和 $V_{m\times m}(\lambda_{ij})_{i,j\leqslant m}=\sum_{i,j=1}^{m}\lambda_{ij}e_i\otimes e_j$，同上述一样证明可知定理 2.2.8 的结论对于 $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{H}\hat{\otimes}_1\boldsymbol{H})$ 和 $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{H}\hat{\otimes}_2\boldsymbol{H})$ 也成立.

下面给出两个重要的例子，它们可以从 (2.4) 直接给出.

2.2.10 例 设 $\alpha_n(s)=x_nI_{\{t_n\leqslant s\}}$，则在 $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{H})$ 上收敛于 α 的充要条件是：

Ⅰ) 或者 $t_n\to\infty$，则 $\alpha=0$；

Ⅱ) 或者 $t_n\to t<\infty$ 且 $x_n\to x$，则 $\alpha(s)=xI_{\{t\leqslant s\}}$.

2.2.11 例 设 $\alpha_n(s)=x_nI_{\{t_n\leqslant s\}}+y_nI_{\{r_n\leqslant s\}}(t_n<r_n)$，则 α_n 收敛到 α 的充要条件是

Ⅰ) 或者 $t_n\to\infty$（当然 $r_n\to\infty$），此时 $\alpha=0$；

Ⅰ） 或者 $t_n \to t < \infty, r_n \to \infty, x_n \to x$，此时 $\alpha(s) = xI_{\{t \leq s\}}$；

Ⅱ） 或者 $t_n \to t < \infty, r_n \to r < \infty, x_n \to x, y_n \to y$，并且当 $x \neq 0 \neq y$ 时 $t < r$，则 $\alpha(s) = xI_{\{t \leq s\}} + yI_{\{r \leq s\}}$.

上述讨论表明下述两个重要事实成立.

2.2.12 作为抽象空间，我们容易验证 $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{R}^n)$ 和乘积空间 $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{R})^n$ 相同，但作为 Skorokhod 拓扑空间，空间 $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{R}^n)$ 是严格地优于乘积拓扑空间 $[\boldsymbol{D}(\boldsymbol{R})]^n$.

2.2.13 $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{H})$ 不是拓扑向量空间，即假设在 $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{H})$ 上 $\alpha_n \to \alpha, \beta_n \to \beta$，但是 $\alpha_n + \beta_n$ 未必收敛到 $\alpha + \beta$.

但是下述结论是正确的.

2.2.14 性质 如果 $\alpha_n \to \alpha, \beta_n \to \beta$ 按 Skorokhod 拓扑成立，并且 β 是连续的，则 $\alpha_n + \beta_n \to \alpha + \beta$ 按 Skorokhod 拓扑成立.

证明 按照定理 2.2.8(a)，存在序列 $\{\lambda_n\}_{n\geq 1} \subset \Lambda$，使得(2.4)对 $\{\alpha_n\}_{n\geq 1}$ 成立. 又由 β 的连续性及不等式

$$\begin{aligned}&\| \beta_n \circ \lambda_n(s) - \beta(s) \| \\ \leq\ & \| \beta_n \circ \lambda_n(s) - \beta \circ \lambda_n(s) \| + \| \beta \circ \lambda_n(s) - \beta(s) \|\end{aligned}$$

容易证明对于 $\{\beta_n\}_{n\geq 1}$(2.4)(Ⅱ)成立，从而可得结论真. 证毕.

2.2.15 引理 设 α_n 和 α 均为 $\boldsymbol{R}_+$ 上非负、右连左极的单调增函数，并且 α 连续. 如果 $\alpha_n(t) \to \alpha(t), \forall\, t \geq 0$，则按 Skorokhod 拓扑 $\alpha_n \to \alpha$.

如果我们定义 $\mathscr{D}_t^0(\boldsymbol{H})$ 是由映射：$\alpha \to \alpha(s), s \leq t$ 所生成的 σ-域，$\mathscr{D}(\boldsymbol{H}) = \vee_{t\geq 0}\mathscr{D}_t^0(\boldsymbol{H}), \mathscr{D}_t(\boldsymbol{H}) = \bigcap_{s>t}\mathscr{D}_s^0(\boldsymbol{H})$，则 $(\mathscr{D}_t(\boldsymbol{H}))_{t\geq 0}$ 是一个 σ-域流，同 J. Jacod 和 A. N. Shiryaev 在[16]中证明相同，我们有如下定理.

2.2.16 定理 上述定义的 σ-域 $\mathscr{D}(\boldsymbol{H})$ 等于 $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{H})$ 上的 Borel σ-域；对任意 $t > 0$，σ-域 $\mathscr{D}_{t-}(\boldsymbol{H}) = \vee_{s<t}\mathscr{D}_s(\boldsymbol{H})$ 是由 $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{H})$ 上所有 $\mathscr{D}_{t-}(\boldsymbol{H})$-可测，并且按 Skorokhod 连续的所有泛函生成的.

2.3 一些泛函的连续性

2.3.1 性质 设$\alpha_n \to \alpha$按Skorokhod拓扑成立，则对$t \geqslant 0$，我们有

a) 存在序列$t_n \to t$使得$\alpha_n(t_n) \to \alpha(t)$，$\alpha_n(t_n-) \to \alpha(t-)$以及$\Delta\alpha_n(t_n) \to \Delta\alpha(t)$.

b) 设$\{t_n\}_{n\geqslant 1}$是任一满足$t_n \to t$以及$\Delta\alpha_n(t_n) \to \Delta\alpha(t)$的序列，如果$\Delta\alpha(t) \neq 0$，则对另一具有上述性质的序列$\{t'_n\}_{n\geqslant 1}$，必存在$n_0 \in \boldsymbol{N}$，使得$t'_n = t_n, n \geqslant n_0$.

(b.1) $t''_n \to t$且$t''_n < t_n$可推得$\alpha_n(t''_n) \to \alpha(t-)$;

(b.2) $t''_n \to t$且$t''_n \leqslant t_n$可推得$\alpha_n(t''_n-) \to \alpha(t-)$;

(b.3) $t''_n \to t$且$t''_n \geqslant t_n$可推得$\alpha_n(t''_n) \to \alpha(t)$;

(b.4) $t''_n \to t$且$t''_n > t_n$可推得$\alpha_n(t''_n-) \to \alpha(t)$;

(b.5) $t''_n \to t$且$\Delta\alpha(t) = 0$可推得$\alpha_n(t''_n) \to \alpha(t)$且$\alpha_n(t''_n-) \to \alpha(t)$;

(b.6) 在$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{H})$上，$\alpha'_n \to \alpha'$，其中$\alpha'_n(s) = \alpha_n(s) - \Delta\alpha_n(t_n)I_{\{t_n\leqslant s\}}$，$\alpha'(s) = \alpha(s) - \Delta\alpha(t)I_{\{t\leqslant s\}}$;

(b.7) 对于(b.6)中所定义的α'_n有$\lim\limits_{\eta\downarrow 0}\limsup\limits_{n\to\infty} w(\alpha'_n, [t-\eta, t+\eta]) = 0$.

证明 由定理2.2.8(a)知存在$\{\lambda_n\}_{n\geqslant 1} \subset \Lambda$使得(2.4)成立. 取$t_n = \lambda_n(t)$，则$\{t_n\}_{n\geqslant 1}$满足a)的要求.

假设$t''_n \to t$且$t'' < t_n = \lambda_n(t)$，则存在一个序列$0 < \varepsilon_n \downarrow 0$使得$\alpha_n(t''_n - \varepsilon_n) - \alpha_n(t''_n-) \to 0$；又存在另一序列$0 < \varepsilon'_n \downarrow 0$使得$t''_n - \varepsilon_n = \lambda_n(t - \varepsilon'_n)$. 则

$$
\begin{aligned}
&\| \alpha_n(t''_n-) - \alpha(t-) \| \\
\leqslant &\| \alpha_n(t''_n - \varepsilon_n) - \alpha_n(t''_n-) \|
\end{aligned}
$$

$$+\ \| \alpha_n \circ \lambda_n(t-\varepsilon'_n) - \alpha(t-\varepsilon'_n) \|$$
$$+\ \| \alpha(t-\varepsilon'_n) - \alpha(t-) \|,$$

由(2.4)(Ⅰ)知上式右端趋于0，所以 $t_n = \lambda_n(t)$ 满足(b.1). 同样可以证明 $\{t_n\}_{n\geqslant 1}$ 也满足(b.2, b.3, b.4).

设 $\{\hat{t}_n\}_{n\geqslant 1}$ 是收敛于 t 的另一序列，并且 $\Delta\alpha_n(\hat{t}_n) \to \Delta\alpha(t)$，如果对于所有充分大的 n, $\hat{t}_n \neq t_n = \lambda_n(t)$，则存在无限子序列 $\{\hat{t}_{n_k}\}_{k\geqslant 1}$ 使得 $\hat{t}_{n_k} < t_{n_k}(\forall\ \ k \geqslant 1)$，或者 $\hat{t}_{n_k} > t_{n_k}(\forall\ \ k \geqslant 1)$. 在前一种情况下，(b.1) 和(b.2) 可推得 $\Delta\alpha_{n_k}(\hat{t}_{n_k}) = \alpha_{n_k}(\hat{t}_{n_k}) - \alpha_{n_k}(\hat{t}_{n_k}-) \to 0$，在后一种情况下，(b.3) 和(b.4) 同样可推得 $\Delta\alpha_{n_k}(\hat{t}_{n_k}) \to 0$. 因此必有 $\Delta\alpha(t) = 0$，即 b) 的第一结论成立.

由(b.i)($i = 1,2,3,4$) 可知(b.5) 成立，下列只要证明(b.6) 和(b.7). 首先假设 $\Delta\alpha(t) = 0$，则 $\alpha' = \alpha$，而函数：

$s \to \Delta\alpha_n(t_n)I_{\{t_n\leqslant s\}}$

一致收敛到0，性质 2.2.14 可推得 $\alpha'_n \to \alpha'$. 如果 $\Delta\alpha(t) \neq 0$，则对所有充分大的 n 有 $t_n = \lambda_n(t)$. 因此

$$\| \alpha'_n \circ \lambda_n(s) - \alpha'(s) \| \begin{cases} = \| \alpha_n \circ \lambda_n(s) - \alpha(s) \|, & \text{如果 } s < t \\ \leqslant \| \alpha_n \circ \lambda_n(s) - \alpha(s) \| \\ \quad + \| \Delta\alpha_n(t_n) - \Delta\alpha(t) \|, & \text{如果 } s \geqslant t, \end{cases}$$

这表明 $\{\alpha'_n, \alpha'\}_{n\geqslant 1}$ 满足条件(2.4)(Ⅱ)，因此 $\alpha'_n \to \alpha'$. 最后，如果 $\sup\limits_{s\geqslant 0} |\lambda_n(s) - s| \leqslant \eta$，则

$$\begin{aligned} & w(\alpha'_n;[t-\eta, t+\eta]) \\ \leqslant\ & w(\alpha'_n \circ \lambda_n;[t-2\eta, t+2\eta]) \\ \leqslant\ & w(\alpha';[t-2\eta, t+2\eta]) + 2\sup_{s\leqslant t+3\eta} \| \alpha'_n \circ \lambda_n(s) - \alpha'(s) \|. \end{aligned}$$

因为当 $\eta \downarrow 0$ 时 $w(\alpha';[t-2\eta, t+2\eta]) \downarrow 0$ 以及 α' 在 t 处连续，即可得到(b.7) 成立. 证毕.

下述结果是性质 2.3.1 的推论，是性质 2.2.14 的改进.

2.3.2　性质　a)　设在 $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{H})$ 上 $\alpha_n \to \alpha$, $\beta_n \to \beta$，如果对任

意的 $t>0$ 都存在一个序列 $t_n \to t$，使得 $\Delta\alpha_n(t_n) \to \Delta\alpha(t)$ 和 $\Delta\beta_n(t_n) \to \Delta\beta(t)$，则 $\alpha_n + \beta_n \to \alpha + \beta$ 按 Skorokhod 拓扑成立.

b) 设 G 是另一 Hilbert 空间，如果在 $D(H)$ 上 $\alpha_n \to \alpha$，在 $D(G)$ 上 $\beta_n \to \beta$，并且对任意的 $t>0$，都存在序列 $t_n \to t$，使得 $\Delta\alpha_n(t_n) \to \Delta\alpha(t)$ 及 $\Delta\beta_n(t_n) \to \Delta\beta(t)$，则在 $D(H \times G)$ 上 $(\alpha_n, \beta_n) \to (\alpha, \beta)$.

证明 b) 是 a) 的简单推论. 事实上，如果我们定义 $\overline{\alpha}_n = (\alpha_n, 0)$，$\overline{\beta}_n = (0, \beta_n)$，则 $\overline{\alpha}_n$、$\overline{\beta}_n \in D(H \times G)$. 由 (2.4) 易知在 $D(H \times G)$ 上 $\overline{\alpha}_n \to \overline{\alpha} = (\alpha, 0)$，$\overline{\beta}_n \to \overline{\beta} = (0, \beta)$. 按照 a) 即得在 $D(H \times G)$ 上 $\overline{\alpha}_n + \overline{\beta}_n = (\alpha_n, \beta_n) \to (\alpha, \beta) = \overline{\alpha} + \overline{\beta}$.

往证 a) 成立. 对任意 $t \notin J(\alpha) \cup J(\beta)$，由假设可知 $\alpha_n(t) + \beta_n(t) \to \alpha(t) + \beta(t)$，因此 $\gamma = \alpha + \beta$ 是序列 $\{\gamma_n = \alpha_n + \beta_n\}_{n \geqslant 1}$ 唯一可能的极限点. 所以我们只要验证序列 $\{\gamma_n\}_{n \geqslant 1}$ 是相对紧的.

$\{\gamma_n\}_{n \geqslant 1}$ 满足条件 2.2.4(Ⅰ)、2.2.4(Ⅲ) 是显然的. 假设 2.2.4(Ⅱ) 不成立，则存在 $N_0 > 0$ 和 $\varepsilon_0 > 0$ 以及序列 $\{n_k\}_{k \geqslant 1}$ 使得 $w'_{N_0}(\gamma_{n_k}, 1/k) > \varepsilon_0$. 按照引理 2.1.4 有如下两种可能：

(Ⅰ) 存在数列 $s_k \leqslant 2/k$，使得 $\| \gamma_{n_k}(s_k) - \gamma_{n_k}(0) \| \geqslant \varepsilon_0$. 但这是不可能的，因为由性质 2.3.1，$\alpha_{n_k}(s_k) \to \alpha(0)$，$\alpha_{n_k}(0) \to \alpha(0)$，对于 β 有同样的结论.

(Ⅱ) 或者存在数列 $0 < s_k^1 < s_k^2 < s_k^3 \leqslant N_0$ 使得 $\liminf\limits_{k\to\infty} s_k^1 > 0$，$s_k^3 - s_k^1 \leqslant 4/k$ 以及 $\| \gamma_{n_k}(s_k^{i+1}) - \gamma_{n_k}(s_k^i) \| \geqslant \varepsilon_0 (i = 1, 2)$，通过取子序列我们可以假设 s_k^i 收敛到某极限点 $t \in (0, N]$，取序列 $t_n \to t$，通过进一步抽取子序列，我们可以假设对于所有 $k \geqslant 1$，t_{n_k} 在相同的区间 $(0, s_k^1)$，或 $[s_k^1, s_k^2)$，或 $[s_k^2, s_k^3)$，或 $[s_k^3, \infty)$. 但是，如果对任意的 $k \geqslant 1$，$s_k^i < t_{n_k}$ (或 $s_k^i \geqslant t_{n_k}$)，性质 2.3.1 及 t_n 的取法可推得 $\gamma_{n_k}(s_k^i) \to \gamma(t-)$ (或 $\gamma_{n_k}(s_k^i) \to \gamma(t)$)，因此在三个极限 $a^i = \lim\limits_{k\to\infty} \gamma_{n_k}(s_k^i) (i = 1, 2, 3)$ 中必成立下列两种情况之一：$a^1 = a^2$ 或 $a^2 = a^3$. 但是由上

述构造知 $\|a^{i+1}-a^i\| \geqslant \epsilon_0$，这就产生了矛盾. 故2.2.4(Ⅱ)成立. 证毕.

由此性质我们容易证明下列等价性:

2.3.3 推论 假设在 $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{R})$ 上 $\alpha_n \to \alpha, \beta_n \to \beta$，则下列叙述等价:

(Ⅰ) 在 $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{R}^2)$ 上，$(\alpha_n, \beta_n) \to (\alpha, \beta)$;

(Ⅱ) 对任意的 $t \in \boldsymbol{R}_+$，存在序列 $\{t_n\}_{n\geqslant 1}, t_n \to t$，使得 $\alpha_n(t_n) \to \alpha(t), \alpha_n(t_n-) \to \alpha(t-), \beta_n(t_n) \to \beta(t), \beta_n(t_n-) \to \beta(t-)$;

(Ⅲ) 在 $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{R})$ 上，$\alpha_n + \beta_n \to \alpha + \beta$;

(Ⅳ) 在 $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{R})$ 上，$|\alpha_n| + |\beta_n| \to |\alpha| + |\beta|$.

如果我们定义 α 在 $t \in \boldsymbol{R}_+$ 处的停止 α^t 为:

$$\alpha^t(s) = \begin{cases} \alpha(s), s < t, \\ \alpha(t), s \geqslant t. \end{cases}$$

由推论 2.3.3 我们可得到下述结果.

2.3.4 推论 假设在 $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{R}^2)$ 上 $(\alpha_n, \beta_n) \to (\alpha, \beta)$，则

(Ⅰ) 对 α、β 的每个连续点 $t \in \boldsymbol{R}_+$ 和每个序列 $\{t_n\}_{n\geqslant 1}, t_n \to t$，

$$\sup_{s\leqslant t_n} |\alpha_n(s) - \beta_n(s)| \to \sup_{s\leqslant t} |\alpha(s) - \beta(s)|,$$

$(\alpha_n^{t_n}, \beta_n) \to (\alpha^t, \beta)$ 在 $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{R}^2)$ 中成立.

(Ⅱ) 对 α 或 β 的任一不连续点 $t \in \boldsymbol{R}_+$ 和任意序列 $\{u_n\}_{n\geqslant 1}$ 及 $\{v_n\}_{n\geqslant 1}, u_n \to t, v_n \to t$，且 $u_n < t_n \leqslant v_n, n \geqslant 1$，有

$$\sup_{s\leqslant v_n} |\alpha_n(s) - \beta_n(s)| \to \sup_{s\leqslant t} |\alpha(s) - \beta(s)|,$$

$$\sup_{s\leqslant u_n} |\alpha_n(s) - \beta_n(s)| \to \sup_{s\leqslant t} |\alpha(s-) - \beta(s-)|,$$

$(\alpha_n^{v_n}, \beta_n) \to (\alpha^t, \beta)$ 在 $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{R}^2)$ 中成立,

其中 $\{t_n\}_{n\geqslant 1}(t_n \to t)$ 是推论 2.3.3(Ⅰ) 所定义的.

2.3.5 性质 假设在 $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{R}^2)$ 中 $(\alpha_n, \beta_n) \to (\alpha, \beta)$，且对任意的 $t \in \boldsymbol{R}_+, \sup_{s\leqslant t} |\beta_n(s) - \beta(s)| \to 0$. 如果 $\Delta\alpha(t) \neq 0$ 可推得 $\Delta\beta(t) \neq 0$，则 $\sup_{s\leqslant t} |\alpha_n(s) - \alpha(s)| \to 0, \forall\, t \in \boldsymbol{R}_+$.

证明　显然，我们只要证明

$$\alpha_n(u_n) - \alpha(u_n) \to 0, \quad \forall\, t \in R_+, \forall\, u_n \to t. \tag{3.1}$$

首先假设 t 为 α 的连续点，则由 Skorokhod 拓扑的性质知 $\alpha_n(u_n) \to \alpha(t)$. 又在这种情况下，有 $\alpha(u_n) \to \alpha(t)$，因此由

$$|\alpha_n(u_n) - \alpha(u_n)| \leqslant |\alpha_n(u_n) - \alpha(t)| + |\alpha(u_n) - \alpha(t)|$$

即得(3.1)成立.

再假设 $\Delta\alpha(t) \neq 0$，则由假设知 $\Delta\beta(t) \neq 0$. 设 $\{t_n\}_{n\geqslant 1}$ 和推论 2.3.3(Ⅱ)相同，取子序列 $\{n'\}$ 和 $\{n''\}$ 使得 $u_{n''} < t_{n''}, u_{n'} \geqslant t_{n'}$，则 $\beta_{n'}(u_{n'}) \to \beta(t), \beta_{n''}(u_{n''}) \to \beta(t-)$. 因为 β_n 局部一致收敛于 β，所以 $\beta_n(u_n) - \beta(u_n) \to 0$. 由

$$|\beta(u_{n'}) - \beta(t)| \leqslant |\beta_{n'}(u_{n'}) - \beta(t)| + |\beta_{n'}(u_{n'}) - \beta(u_{n'})|,$$

$$|\beta(u_{n''}) - \beta(t-)| \leqslant |\beta_{n''}(u_{n''}) - \beta(t-)| + |\beta_{n''}(u_{n''}) - \beta(u_{n''})|$$

即得 $\beta(u_{n'}) \to \beta(t)$ 和 $\beta(u_{n''}) \to \beta(t-)$. 因此对几乎所有的 n' 和 n'',

$$u_{n'} \geqslant t, \qquad u_{n''} < t. \tag{3.2}$$

另一方面，(3.2)可推得 $\alpha(u_{n'}) \to \alpha(t)$ 和 $\alpha(u_{n''}) \to \alpha(t-)$. 和 $\{\beta_n\}_{n\geqslant 1}$ 完全同样的讨论我们可得

$$\alpha_{n'}(u_{n'}) \to \alpha(t), \quad \alpha_{n''}(u_{n''}) \to \alpha(t-).$$

由此即得结论(3.1)成立. 证毕.

2.3.6　推论　假设按 $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{R}^3)$ 中的拓扑 $(\alpha_n, \beta_n, \gamma_n) \to (\alpha, \beta, \gamma)$，并且 $\sup\limits_{s\leqslant t}|\beta_n(s) - \beta(s)| \to 0, \sup\limits_{s\leqslant t}|\gamma_n(s) - \gamma(s)| \to 0, \forall\, t \geqslant 0$. 如果 $\Delta\alpha(t) \neq 0$ 可推得 $\Delta\beta(t) \neq 0$ 或 $\Delta\gamma(t) \neq 0$，则 $\sup\limits_{s\leqslant t}|\alpha_n(s) - \alpha(s)| \to 0, \forall\, t \geqslant 0$.

2.3.7　性质　假设在 $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{R}^2)$ 中 $(\alpha_n, \beta_n) \to (\alpha_\infty, \beta_\infty)$. 对任意的 $N > 0$，令

$$t_n^N = \inf\{t: |\alpha_n(t)| \geqslant N \text{ 或 } |\alpha_n(t-)| \geqslant N\},$$

$$t_n^{N+} = \inf\{t: |\alpha_n(t)| > N \text{ 或 } |\alpha_n(t-)| > N\},$$

则在条件 $t_\infty^N = t_\infty^{N+}, \alpha_\infty(t_\infty^N-) \neq N$ 下，下述结论成立：

(Ⅰ) 在 $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{R}^2)$ 中，$(\alpha_n^{t_n^N},\beta_n)\to(\alpha_\infty^{t_\infty^N},\beta_\infty)$，

(Ⅱ) 在 $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{R}^2)$ 中，$(\alpha_n^{t_n^{N+}},\beta_n)\to(\alpha_\infty^{t_\infty^N},\beta_\infty)$.

证明　为了书写方便，我们记 $\alpha_n^N=\alpha_n^{t_n^{N+}}$，$n\in\overline{\boldsymbol{N}}=\boldsymbol{N}\cup\{\infty\}$. 由推论 2.3.4 我们只要证明

a)　$t_n^N\to t_\infty^N$，

b)　如果 t_∞^N 是 α_∞ 的不连续点，$\{t_n\}_{n\geq 1}$ 是推论 2.3.3(Ⅱ)中的数列，则除去有限多个 n 均有 $t_n^N\geq t_n$.

任取 $\varepsilon>0$，设 t_1 和 t_2 均为 α_∞ 的连续点，且满足 $t_1<t_\infty^N<t_2$，$t_2-t_1<\varepsilon$. 由假设条件和推论 2.3.4 可得

$$\begin{aligned}\sup_{s\leq t_1}|\alpha_n(s)|&\to\sup_{s\leq t_1}|\alpha_\infty(s)|\\&=N_1<N\leq\sup_{s\leq t_\infty^N}|\alpha_\infty(s)|=N_0\end{aligned}$$

及

$$\sup_{s\leq t_2}|\alpha_n(s)|\to\sup_{s\leq t_2}|\alpha_\infty(s)|=N_2>N_0\geq N.$$

假设存在无穷多个 $\{n'\}$，使得 $t_{n'}^N<t_1$，则有

$$N\leq\sup_{s\leq t_{n'}^N}|\alpha_{n'}(s)|\leq\sup_{s\leq t_1}|\alpha_{n'}(s)|\to N_1<N,$$

这是不可能的，因此除去有限多个 n 都有 $t_1<t_n^N$.

另一方面，如果存在无限序列 $\{n''\}$，使得 $t_{n''}^N>t_2$，则

$$N\geq\sup_{s\leq t_{n''}^N}|\alpha_{n''}(s)|\geq\sup_{s\leq t_2}|\alpha_{n''}(s)|\to N_2>N,$$

这也是不可能的，故除去有限多个 n 都有 $t_1\leq t_n^N\leq t_2$，由 $\varepsilon>0$ 的任意性可知结论 a) 成立.

如果 t_∞^N 是 α_∞ 的不连续点，且存在无限多个 $\{n'\}$，使得 $t_{n'}^N<t_{n'}$，则由推论 2.3.4 可推得：

$$N\leq\sup_{s\leq t_{n'}^N}|\alpha_{n'}(s)|\to\sup_{s\leq t_\infty^N}|\alpha_\infty(s-)|<N.$$

这是不可能的，所以 b) 成立.

关于 $\{t_n^{N+}\}_{n\geq 1}$ 的结论，证明与 $\{t_n^N\}_{n\geq 1}$ 完全相同. 证毕.

2.3.8 推论 假设在$D(R^3)$中，$(\alpha_n,\beta_n,\gamma_n)\to(\alpha_\infty,\beta_\infty,\gamma_\infty)$.
如果定义

$$t_n^N=\inf\{t:|\alpha_n(t)|+|\beta_n(t)|\geqslant N \text{ 或 } |\alpha_n(t-)|+|\beta_n(t-)|\geqslant N\},$$

$$t_n^{N+}=\inf\{t:|\alpha_n(t)|+|\beta_n(t)|>N \text{ 或 } |\alpha_n(t-)|+|\beta_n(t-)|>N\}$$

$$k_n(t)=I_{\{|\alpha_n(t)|+|\beta_n(t)|<N\}},\qquad t\in R_+,$$

则在假设条件$t_\infty^{N+}=t_\infty^N$及$\alpha_\infty(t_\infty^N-)\neq N$下，有

（Ⅰ）按$D(R^4)$中的拓扑，$(\alpha_n^N,k_n^N,\beta_n^N,\gamma_n)\to(\alpha_\infty^N,k_\infty^N,\beta_\infty^N,\gamma_\infty)$，

（Ⅱ）按$D(R^4)$中的拓扑，

$$(\alpha_n^{N+},k_n^N,\beta_n^{N+},\gamma_n)\to(\alpha_\infty^N,k_\infty^N,\beta_\infty^N,\gamma_\infty),$$

其中$\alpha_n^N,k_n^N,\beta_n^N$和$\alpha_n^{N+},\beta_n^{N+}$分别是$\alpha_n,k_n$及$\beta_n$在$t_n^N$及$t_n^{N+}$的停止.

注 在上述推论中，条件$t_\infty^N=t_\infty^{N+}$及$\alpha_\infty(t_\infty^N-)\neq N$是不能去掉的，请看下面例子.

例1 假设

$$\alpha_n(t)=\left(1-\frac{1}{n}\right)I_{\{1\leqslant t<2\}}+\left(1-\frac{1}{n}\right)I_{\{3\leqslant t<4\}},$$

$$\alpha_\infty(t)=I_{\{1\leqslant t<2\}}+I_{\{3\leqslant t<4\}},\quad N=1,$$

则$t_n^1=+\infty,t_\infty^1=1,t_\infty^{1+}=\infty$，并且$\alpha_n=\alpha_n^1,\alpha_\infty\neq\alpha_\infty^1$. 虽然在$D(R)$中$\alpha_n\to\alpha_\infty$，但是$\alpha_n^1\not\to\alpha_\infty^1$.

例2 假设

$$\alpha_n(t)=\left(1+\frac{1}{n}\right)tI_{\{0\leqslant t<1\}}+2I_{\{1\leqslant t\}}$$

$$\alpha_\infty(t)=tI_{\{0\leqslant t<1\}}+2I_{\{1\leqslant t\}},\quad N=1,$$

则有$t_\infty^1=t_\infty^{1-}=1$且$\alpha_\infty(t_\infty^1-)=1$. 但是$\alpha_n(t_n^1)=1,\alpha_\infty(t_\infty^1)=2$. 显然在$D(R)$中$\alpha_n\to\alpha_\infty,\alpha_n^1\not\to\alpha_\infty^1$.

2.3.9 引理 设f和g均为R_+上右连左极的非负函数，则

$$\left|\sup_{s\leqslant t}f(s)-\sup_{s\leqslant t}g(s)\right|\leqslant\sup_{s\leqslant t}|f(s)-g(s)|.$$

证明 设 $u_n, v_n \leqslant t$ 使得 $\lim\limits_{n\to\infty} f(u_n) = \sup\limits_{s\leqslant t} f(s)$, $\lim\limits_{n\to\infty} g(v_n) = \sup\limits_{s\leqslant t} g(s)$. 不失一般性, 假设 $\sup\limits_{s\leqslant t} f(s) > \sup\limits_{s\leqslant t} g(s)$. 因为 $\{g(u_n)\}_{n\geqslant 1}$ 是有界数列, 所以有收敛子序列 $\{g(u_{n_k})\}_{k\geqslant 1}$, 即有 $\lim\limits_{k\to\infty} g(u_{n_k}) \leqslant \lim\limits_{n\to\infty} g(v_n)$. 于是

$$\left|\sup_{s\leqslant t} f(s) - \sup_{s\leqslant t} g(s)\right|$$
$$= \sup_{s\leqslant t} f(s) - \sup_{s\leqslant t} g(s) = \lim_{n\to\infty} f(u_n) - \lim_{n\to\infty} g(v_n)$$
$$\leqslant \lim_{k\to\infty} f(u_{n_k}) - \lim_{k\to\infty} g(v_{n_k}) \leqslant \sup_{s\leqslant t} |f(s) - g(s)|.$$

2.3.10 性质 $D(H)$ 上的函数 $\alpha \to \sup\limits_{s\leqslant t} \|\alpha(s)\|$ 以及 $\alpha \to \sup\limits_{s\leqslant t} \|\Delta\alpha(s)\|$ 在任一使得 $t \notin J(\alpha)$ 的 α 点处连续.

证明 令 $M^\alpha(t) = \sup\limits_{s\leqslant t} \|\alpha(s)\|$, $N^\alpha(t) = \sup\limits_{s\leqslant t} \|\Delta\alpha(s)\|$. 设 $\alpha_n \to \alpha$ 且 $t \notin J(\alpha)$. 对于 $\{\alpha_n, \alpha\}_{n\geqslant 1}$, 取 $\{\lambda_n\}_{n\geqslant 1} \subset \Lambda$ 使得(2.4)成立. 由于 λ_n 是严格单调的连续函数, 则 $M^{\alpha_n}(t) = M^{\alpha_n\cdot\lambda_n}(\lambda_n^{-1}(t))$ 和 $N^{\alpha_n}(t) = N^{\alpha_n\cdot\lambda_n}(\lambda_n^{-1}(t))$. 由(2.4)(Ⅱ)及引理 2.3.9 可推得

$$|M^{\alpha_n}(t) - M^\alpha(\lambda_n^{-1}(t))| \to 0, |N^{\alpha_n}(t) - N^\alpha(\lambda_n^{-1}(t))| \to 0.$$

而 $\lambda_n^{-1}(t) \to t, \Delta\alpha(t) = 0$, 由此即得 $M^\alpha(\lambda_n^{-1}(t)) \to M^\alpha(t)$ 以及 $N^\alpha(\lambda_n^{-1}(t)) \to N^\alpha(t)$, 故 $M^{\alpha_n}(t) \to M^\alpha(t)$ 和 $N^{\alpha_n}(t) \to N^\alpha(t)$. 命题得证.

在本节的余下部分, 我们所感兴趣的是函数 α 的"停止", 这在第四章中非常有用. 对于 $a > 0$, 定义

$$S_a(\alpha) = \inf\{t: \|\alpha(t)\| \geqslant a \text{ 或 } \|\alpha(t-)\| \geqslant a\}.$$

2.3.11 引理 (Ⅰ) 对任意的 $a > 0$, S_a 是 $(\mathscr{D}_t^0(H))_{t\geqslant 0}$ 停时;

(Ⅱ) $a \to S_a(\alpha)$ 是 a 的单调不降的左连续函数;

(Ⅲ) 集合 $V(\alpha) = \{a > 0: S_a(\alpha) < S_{a+}(\alpha)\}$ 是至多可数集;

(Ⅳ) 集合 $V'(\alpha) = \{a > 0: S_a(\alpha) \in J(\alpha), \|\alpha(S_a(\alpha)-)\| = a\}$ 是至多可数集.

证明　（Ⅰ）如果令 $M^{\alpha}(t)=\sup\limits_{s\leqslant t}\|\alpha(s)\|$，则映射 $\alpha\to M^{\alpha}(t)$ 显然是 $\mathscr{D}_t^0(\boldsymbol{H})$ 可测的，并且 $t\to M^{\alpha}(t)$ 是非降、右连续. 又 $S_a(\alpha)>t\Longleftrightarrow M^{\alpha}(t)<a$，所以 S_a 是停时.

（Ⅱ）函数 $a\to S_a(\alpha)$ 的非降性是显然的，其左连续性可由 $S_a(\alpha)=\inf\{t:M^{\alpha}(t)\geqslant a\}$ 及 $M^{\alpha}(\cdot)$ 的右连续得到，并且 $M^{\alpha}(S_a(\alpha))\geqslant a$.

（Ⅲ）因为 $a\to S_a(\alpha)$ 至多有可列多个不连续点，所以 $V(\alpha)$ 是至多可数集.

（Ⅳ）设 $\{t_n\}_{n\geqslant 1}$ 是 α 的不连续点的全体. 如果 $a\in V'(\alpha)$，则存在 n 使得 $S_a(\alpha)=t_n$，并且 $\|\alpha(t_n-)\|=a$，显然这样的 a 只能有至多可数个. 证毕.

2.3.12　性质　函数 $\alpha\to S_a(\alpha)$ 在任一使得 $a\notin V(\alpha)$ 的 α 处连续.

证明　设 $\alpha_n\to\alpha$ 且 $a\notin V(\alpha)$，$M^{\alpha}(t)$ 的定义和性质 2.3.10 证明中的相同. 性质 2.3.10 表明 $M^{\alpha_n}(t)\to M^{\alpha}(t),\forall\, t\notin J(\alpha)$.

如果 $t<S_a(\alpha)$，则 $M^{\alpha}(t)<a$. 如果 $t\notin J(\alpha)$，则当 n 充分大时 $M^{\alpha_n}(t)<a$，因此 $t<S_a(\alpha_n)$. 由于 $\boldsymbol{R}_+\setminus J(\alpha)$ 在 $\boldsymbol{R}_+$ 中稠密，所以 $\liminf\limits_{n\to\infty}S_a(\alpha_n)\geqslant S_a(\alpha)$.

如果 $t>S_a(\alpha)$，由于 $a\notin V(\alpha)$，则 $t>S_{a+}(\alpha)$. 因此存在 $b>a$ 使得 $t\geqslant S_b(\alpha)$，并且 $M^{\alpha}(t)\geqslant b>a$. 如果 $t\notin J(\alpha)$，则当 n 充分大时，$M^{\alpha_n}(t)>a$，所以 $S_a(\alpha_n)\leqslant t$. 这表明 $\limsup\limits_{n\to\infty}S_a(\alpha_n)\leqslant S_a(\alpha)$，即 $\lim\limits_{n\to\infty}S_a(\alpha_n)=S_a(\alpha)$. 证毕.

2.3.13　性质　对于 $\alpha\in\boldsymbol{D}(\boldsymbol{H})$，定义 $\alpha^{S_a}(t)=\alpha(t\wedge S_a(\alpha))$，则从 $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{H})$ 到 $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{H}^2)$ 的映射：$\alpha\to(\alpha,\alpha^{S_a})$ 在任一使得 $a\notin V(\alpha)\cup V'(\alpha)$ 的 α 处连续.

证明　设 $\alpha_n\to\alpha$ 且 $a\notin V(\alpha)\cup V'(\alpha)$.

a)　设 I 是 $\boldsymbol{R}_+$ 的任一子区间，则显然有

$$\sup_{s\leqslant N} \| (\alpha_n, \alpha_n^{S_a}) \| \leqslant 2 \sup_{s\leqslant N} \| \alpha_n(s) \|,$$
$$w((\alpha_n, \alpha_n^{S_a}); I) \leqslant 2w(\alpha_n; I).$$

因为$\{\alpha_n\}_{n\geqslant 1}$是相对紧的，应用定理 2.2.8(b) 可知$\{(\alpha_n, \alpha_n^{S_a})\}_{n\geqslant 1}$也是相对紧的. 因此我们只要证明$(\alpha, \alpha^{S_a})$是其唯一的极限点. 为了叙述方便，不妨假设$(\alpha_n, \alpha_n^{S_a})$收敛于一个极限点，显然这个极限点具有形式$(\alpha, \beta)$. 下面我们将证明$\beta = \alpha^{S_a}$.

b) 由性质 2.3.12 知$S_n \triangleq S_a(\alpha_n)$收敛于$S = S_a(\alpha)$. 对任意的$t < S$且$t \notin J(\alpha) \cup J(\beta)$，当$n$充分大时$\alpha_n^{S_a}(t) = \alpha_n(t)$，并且$\alpha_n^{S_a}(t) \to \alpha(t) = \alpha^{S_a}(t)$，而$\alpha_n(t) \to \alpha(t)$，因此在$[0, S)$上，$\alpha = \beta$. 对于所有$t > S$且$t \notin J(\beta)$，当$n$充分大时$\alpha_n^{S_a}(t) = \alpha_n(S_a)$，并且$\alpha_n(S_a)$也收敛于$\beta(t)$. 因此$\beta(t) = \beta(s) = \lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n(S_n)(\forall\, t \geqslant S$，这是因为$\beta$是右连续的).

c) 最后证明当$S < \infty$时$\alpha_n(S_n) \to \alpha(S)$. 如果$S \notin J(\alpha)$，注意到$S_n \to S$，由 2.3.1(b.5) 即得结论成立. 如果$S \in J(\alpha)$，由性质 2.3.1 知存在序列$t_n \to S$使得$\alpha_n(t_n) \to \alpha(S)$和$\alpha_n(t_n-) \to \alpha(S-)$. 因为$a \notin V'(\alpha)$，由定义$S = S_a(\alpha)$我们可推得$\| \alpha(S-) \| < a \leqslant \| \alpha(S) \|$. 假设存在无限序列$\{n_k\}_{k\geqslant 1}$使得$t_{n_k} > S_{n_k}$，则性质 2.3.1 可推得$\| \alpha_{n_k}(S_{n_k}) \|$和$\| \alpha_{n_k}(S_{n_k}-) \|$收敛于同一极限$\| \alpha(S-) \| < a$. 由$S_n$的定义可得$\| \alpha_n(S_n-) \| \vee \| \alpha_n(S_n) \| \geqslant a$，这就产生了矛盾. 因此对于充分大的$n$都有$t_n \leqslant S_n$. 在这种情况下，再次利用性质 2.3.1 即得$\alpha_n(S_n) \to \alpha(S)$. 命题得证.

记$\overline{\boldsymbol{D}}(\boldsymbol{R}) = \{\alpha : \alpha \in \boldsymbol{D}(\boldsymbol{R}), \forall\, t > 0, \alpha(t) > 0$且$\alpha(t-) > 0\}$. 对任意$a > 0$，定义

$$T_a(\alpha) = \inf\{t : |\alpha(t)| \leqslant a \text{ 或 } |\alpha(t-)| \leqslant a\}.$$

2.3.14 引理 (Ⅰ) T_a是$(\mathscr{D}_t^0(\boldsymbol{R}))_{t\geqslant 0}$停时；

(Ⅱ) 对于$\alpha \in \overline{\boldsymbol{D}}(\boldsymbol{R})$，$a \to T_a(\alpha)$是单调不增函数；

(Ⅲ) $\overline{V}(\alpha) = \{b > 0 : T_{b-}(\alpha) > T_b(\alpha)\}(\alpha \in \overline{\boldsymbol{D}}(\boldsymbol{R}))$是至多可

数集；

(Ⅳ) $\overline{V}'(\alpha)=\{b>0:T_b(\alpha)\in J(\alpha)$ 且 $\alpha(T_b(\alpha)-)=b\}$ 是至多可数集，其中 $\alpha\in\overline{D}(\boldsymbol{R})$.

证明　(Ⅰ) 令 $m^\alpha(t)=\inf\limits_{s\leqslant t}|\alpha(s)|$，则 $\alpha\to m^\alpha(t)$ 是 $\mathscr{D}_t^0(\boldsymbol{R})$ 可测，并且 $t\to m^\alpha(t)$ 是单调不增函数. 由 $T_b(\alpha)>t\Longleftrightarrow m^\alpha(t)>b$ 即得 T_b 是 $(\mathscr{D}_t^0(\boldsymbol{R}))_{t\geqslant 0}$ 停时.

(Ⅱ) 由 $\alpha\in\overline{D}(\boldsymbol{R})$ 知 $\frac{1}{\alpha}\in D(\boldsymbol{R})$，又 $T_b(\alpha)=S_{1/b}(1/\alpha)$，$S_a$ 的单调不降可推得 $T_b(\alpha)$ 是 b 的单调不增函数.

(Ⅲ) 和 (Ⅳ) 的证法同引理 2.3.11(Ⅲ)，(Ⅳ) 相似. 证毕.

2.3.15　性质　设 $\alpha\in\overline{D}(\boldsymbol{R})$. 如果 $a\notin V(\alpha)$，$b\notin\overline{V}(\alpha)$ 且 $a>b$，则映射 $\beta\to S_a(\beta)\wedge T_b(\beta)$ 在 α 处连续.

证明　由性质 2.3.12 知 $S_a(\beta)$ 在 α 处连续，同性质 2.3.12 的证法类似可知 $T_b(\beta)$ 也在 α 处连续. 所以 $S_a(\beta)\wedge T_b(\beta)$ 在 α 处连续. 证毕.

2.3.16　性质　设 $\alpha\in\overline{D}(\boldsymbol{R})$，$a\notin V(\alpha)\cup V'(\alpha)$，$b\notin\overline{V}(\alpha)\cup\overline{V}'(\alpha)$，且 $a>b$，则从 $\overline{D}(\boldsymbol{R})$ 到 $\overline{D}(\boldsymbol{R}^2)$ 的映射 $\beta\to(\beta,\beta^{S_a\wedge T_b})$ 在 α 处连续.

证明　同性质 2.3.13 的证明类似，故略去.

2.4　测度及整值测度的弱收敛

设 $\boldsymbol{E}$ 是具有可数基局部紧的 Hausdorff 空间，$C_K(\boldsymbol{E})$ 为 $\boldsymbol{E}$ 上具有紧支集的实值连续函数的全体，$\mathscr{B}(\boldsymbol{E})$ 为 $\boldsymbol{E}$ 的子集生成的 Borel σ-域，$\mathscr{M}(\boldsymbol{E})$ 为 $\mathscr{B}(\boldsymbol{E})$ 上全体非负 Radon 测度的集合并在其上赋予淡收敛拓扑：$\mu_n\in\mathscr{M}(\boldsymbol{E})$ 淡收敛于 $\mu\in\mathscr{M}(\boldsymbol{E})$，记为 $\mu_n\xrightarrow{v}\mu$，如果 $\int_E f(x)\mu_n(\mathrm{d}x)\to\int_E f(x)\mu(\mathrm{d}x)$，$\forall f\in C_K(\boldsymbol{E})$. 在淡收敛拓扑下，$\mathscr{M}(\boldsymbol{E})$ 成为 Polish 空间. 记 $\mathscr{N}(\boldsymbol{E})$ 为所有仅取 $\{0,1,\cdots\}\cup$

$\{\infty\}$ 的 Radon 测度所成的空间，则在淡收敛拓扑下，$\mathscr{N}(\boldsymbol{E})$ 是 $\mathscr{M}(\boldsymbol{E})$ 的闭子空间.

设 $f_n(s,x)$ 和 $f(s,x)$ 为定义在 $\boldsymbol{R}_-\times\boldsymbol{E}$ 上的 $\boldsymbol{R}^n$- 值可测函数，$\upsilon\in\mathscr{M}(\boldsymbol{R}_+\times\boldsymbol{E})$，我们称 f_n 关于 υ 连续收敛于 f，记为 $f_n\xrightarrow{c.c.}f(\upsilon\text{-}a.e.)$，如果存在 $A\in\mathscr{B}(\boldsymbol{R}_+\times\boldsymbol{E})$，$\upsilon(A)=0$，使得对任意的 $(t,x)\in A^c$，任意 $(t_n,x)\to(t,x)$ 都有 $f_n(t_n,x)\to f(t,x)$.

显然，如果 f_n 一致收敛到 f，则对任意 $\upsilon\in\mathscr{M}(\boldsymbol{R}_+\times\boldsymbol{E})$，都有 $f_n\xrightarrow{c.c.}f(\upsilon\text{-}a.e.)$.

2.4.1 引理 设 $\upsilon_n,\upsilon\in\mathscr{M}(\boldsymbol{R}_+\times\boldsymbol{E})$，$f_n$ 和 f 是 $\boldsymbol{R}_+\times\boldsymbol{E}$ 上的 $\boldsymbol{R}^d$- 值可测函数. 假设

(Ⅰ) $f_n\xrightarrow{c.c.}f(\upsilon\text{-}a.e.)$，

(Ⅱ) $\upsilon_n\xrightarrow{v}\upsilon$，

(Ⅲ) 存在常数 $C>0$，使得 $|f_n|\leqslant C\ (\upsilon_n\text{-}a.e.)$，$\forall\ n\geqslant1$，

(Ⅳ) f_n 和 f 具有相同的紧支集 $K\subset\boldsymbol{R}_+\times\boldsymbol{E}$，

则

$$\int_0^\infty\int_E f_n(s,x)\upsilon_n(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)\longrightarrow\int_0^\infty\int_E f(s,x)\upsilon(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x).\qquad(4.1)$$

证明 因为 f_n 和 f 具有相同的紧支集并且 $\upsilon_n\xrightarrow{v}\upsilon$，所以我们可以假设 υ_n 和 υ 都是有限测度，并且 $\upsilon_n\xrightarrow{w}\upsilon$. 根据假设，由[3]的定理 5.5(P34) 知 $\upsilon_nf_n^{-1}\xrightarrow{w}\upsilon f^{-1}$. 又由 $\{f_n,f,n\geqslant1\}$ 一致有界，故有(4.1) 成立. 证毕.

2.4.2 引理 在引理 2.4.1 中，如果假设 υ 关于 t 连续：

(Ⅴ) $\upsilon(\{t\}\times\boldsymbol{E})=0,\quad\forall\ t\geqslant0$，

则

$$\int_0^t\int_E f_n(s,x)\upsilon_n(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)\longrightarrow\int_0^t\int_E f(s,x)\upsilon(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)\qquad(4.2)$$

按 $D(R^d)$ 中的 Skorokhod 拓扑成立.

证明　我们只要就 $d=1$ 的情形证之. 首先假设 $f_n \geqslant 0$. 利用引理 2.4.1 知对任意的 $t>0$,(4.2) 成立. 从而由引理 2.2.15 知命题正确. 对一般的 f_n,我们可以分别考虑 f_n^+ 和 f_n^-,由性质 2.2.14 并注意到条件(Ⅴ)即知引理成立. 证毕.

2.4.3　定理　设 $\upsilon_n, \upsilon \in \mathscr{N}_0 = \{\mu \in \mathscr{N}: \mu(\{t\} \times E) = 0$ 或 $1, \forall\, t \geqslant 0\}$. 假设引理 2.4.1 中的条件(Ⅰ)、(Ⅱ)和(Ⅳ)成立. 如果 $\upsilon(\{0\} \times E) = 0$,则

$$\int_0^t \int_E f_n(s,x)\upsilon_n(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x) \longrightarrow \int_0^t \int_E f(s,x)\upsilon(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)$$

按 $D(R^d)$ 中的 Skorokhod 拓扑成立.

证明　不失一般性,我们可以假设(Ⅳ)中的紧集 K 为 υ 的连续集,即 $\upsilon(\partial K)=0$. 由条件(Ⅱ),我们有 $\upsilon_n(K) \to \upsilon(K)$. 因为 υ_n 和 υ 都是整数值随机测度,所以我们可以假设当 n 充分大时,$\upsilon_n(K) = \upsilon(K) \triangleq r$. 因此,$\upsilon_n$ 和 υ 在 K 上的限制 υ_n^* 和 υ^* 可以表示为:

$$\upsilon_n^*(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x) = \sum_{i=1}^r \delta_{(t_i^n, x_i^n)}(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x),$$

$$\upsilon^*(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x) = \sum_{i=1}^r \delta_{(t_i, x_i)}(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x),$$

其中 $\delta_{(t,x)}(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)$ 是在点 (t,x) 的 Dirac 测度. 因为 υ_n^* 弱收敛于 υ^*,所以我们可以假设 $(t_i^n, x_i^n) \to (t_i, x_i), n \to \infty\ (i=1,2,\cdots,r)$. 因此,如果假设 $0<t_1<t_2<\cdots<t_r$,则当 n 充分大时也有 $0<t_1^n<t_2^n<\cdots<t_r^n$, 并且 $x_n(t) = \int_0^t \int_E f_n(s,x)\upsilon_n(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)$ 和 $x(t) = \int_0^t \int_E f(s,x)\upsilon(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)$ 可分别表示为 $x_n(t) = \sum_{t_i^n \leqslant t} f_n(t_i^n, x_i^n)$ 和 $x(t) = \sum_{t_i \leqslant t} f(t_i, x_i)$. 下面让我们来定义时间变换. 令 $\lambda_n(0)=0, \lambda_n(t_i) = t_i^n, \lambda_n(t) = t, t \geqslant t_r + 1$,并且在 $[0,t_1]$、$[t_1,t_2]$,$\cdots$,$[t_r, t_r+1]$ 上,

λ_n 是线性的，则 $\lambda_n \in \Lambda$. 由于 $t_i^n \to t_i, n \to \infty (i = 1,2,\cdots,r)$ 可知 $\lambda_n(t)$ 一致收敛到 $\lambda(t) = t$. 为了证明引理成立，我们只要证明 $x_n(\lambda_n(t))$ 在 $\boldsymbol{R}_+$ 的任一紧子集上一致收敛到 $x(t)$. 注意到 $x_n(\lambda_n(t)) = \sum\limits_{t_i^n \leqslant \lambda_n(t)} f_n(t_i^n, x_i^n) = \sum\limits_{t_i \leqslant t} f_n(t_i^n, x_i^n)$, 因此 $x_n(\lambda_n(t))$, $n = 1,2,\cdots$ 是有相同不连续点的阶梯函数. 因为 $(t_i^n, x_i^n) \to (t_i, x_i), n \to \infty$, 由条件(Ⅰ)知 $f_n(t_i^n, x_i^n) \to f(t_i, x_i)$, 故由上述证明可知 $x_n(\lambda_n(t))$ 在 $\boldsymbol{R}_+$ 的任一紧子集上一致收敛于 $x(t)$. 命题证毕.

3 Hilbert 空间值半鞅序列的胎紧性

在随机过程序列的极限定理的研究中，胎紧性的研究是相当重要的．在这一章里，我们主要讨论取值于 Hilbert 空间的随机过程序列的胎紧性，为研究无限维随机过程序列的极限定理铺平道路．本章取材于[18,35,40,42]．

3.1 概率测度的弱收敛

设 E 为 Polish 空间，$\mathscr{B}(E)$ 为其 Borel σ-域．记 $\mathscr{P}(E)$ 是 $(E,\mathscr{B}(E))$ 上概率测度的全体，$C_b(E)$ 是 E 上有界连续函数的全体．设 $P_n, P \in \mathscr{P}(E)$，称 P_n 弱收敛到 P，记为 $P_n \xrightarrow{w} P$，如果

$$\int_E f(x)P_n(\mathrm{d}x) \longrightarrow \int_E f(x)P(\mathrm{d}x), \forall\, f \in C_b(E).$$

在弱收敛拓扑下，$\mathscr{P}(E)$ 也是 Polish 空间．

设 $\mu_n, \mu \in \mathscr{P}(E)$，则 $\mu_n \xrightarrow{w} \mu$ 等价于：对任一闭集 F，$\limsup\limits_{n\to\infty}\mu_n(F) \leqslant \mu(F)$．

集合 $A \subset \mathscr{P}(E)$ 称为是胎紧的(Tightness),如果对任意的 $\varepsilon > 0$,存在紧子集 $K \subset E$ 使得$\sup\limits_{\mu \in A} \mu(K) > 1 - \varepsilon$.

下面是著名的 Prokhorov 定理.

3.1.1 定理 子集合 $A \subset \mathscr{P}(E)$ 关于弱收敛拓扑是相对紧的充要条件是 A 胎紧.

一般地,我们也考虑 $(E, \mathscr{B}(E))$ 上全体有限测度空间 $\mathscr{M}(E)$. 关于弱收敛拓扑, $\mathscr{M}(E)$ 也构成 Polish 空间. 在定义子集 $A \subset \mathscr{M}(E)$ 是胎紧时,要附加条件$\sup\limits_{\mu \in A} \mu(E) < \infty$. 对于有限测度定理 3.1.1 仍然成立.

设$(\Omega, \mathscr{F}, P)$是概率空间, X 是$(\Omega, \mathscr{F}, P)$上 E- 值随机变量,则 P 在 X 下的像 $P \circ X^{-1} \in \mathscr{P}(E)$,我们称其为 X 的分布,记为 $\mathscr{L}(X)$ 或 $\mathscr{L}(X|P)$.

设 X^n 是定义在概率空间$(\Omega^n, \mathscr{F}^n, P^n)$上的随机变量, X^n 的分布为 $\mathscr{L}(X^n) = P^n \circ (X^n)^{-1}$. 如果按 $\mathscr{P}(E)$ 中的弱收敛拓扑 $\mathscr{L}(X^n) \to \mathscr{L}(X)$,则称$\{X^n\}_{n \geq 1}$依分布弱收敛于 X,记为 $X^n \xrightarrow{\mathscr{L}} X$. 这等价于对任意 $f \in C_b(E)$, $E_{P^n}(f(X^n)) \to E_P(f(X))$,其中 E_{P^n} 表示关于 P^n 取数学期望.

随机变量序列$\{X^n\}_{n \geq 1}$(为强调其定义的空间,有时也记为$\{X^n | P^n\}_{n \geq 1}$)称为是胎紧的,如果其分布$\{\mathscr{L}(X^n)\}_{n \geq 1}$是胎紧的,即对任意 $\varepsilon > 0$,存在紧子集 $K \subset E$,使得$\sup\limits_n P^n(X^n \notin K) < \varepsilon$. 则由定理 3.1.1 可推得:

3.1.2 定理 序列$\{\mathscr{L}(X^n)\}_{n \geq 1}$在 $\mathscr{P}(E)$ 中是相对紧的充要条件是$\{X^n\}_{n \geq 1}$是胎紧的.

3.2 Hilbert 空间值随机过程的胎紧性

在这一节里,我们将考虑 H- 值右连左极随机过程. 设 X 是定

义在概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的$\boldsymbol{H}$-值右连左极随机过程，则X可以视为取值于 Polish 空间$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{H})$的随机变量，其分布$\mathscr{L}(X)\in\mathscr{P}(\boldsymbol{D}(\boldsymbol{H}))$. 以下我们假设$\boldsymbol{H}$-值随机过程$X^n$,$X$分别定义在$(\Omega^n,\mathscr{F}^n,P^n)$和$(\Omega,\mathscr{F},P)$上.

要证明$X^n\xrightarrow{\mathscr{L}}X$,经常通用的方法是通过如下步骤：

3.2.1 （Ⅰ） 证明$\{X^n\}_{n\geqslant 1}$胎紧（或$\{\mathscr{L}(X^n)\}_{n\geqslant 1}$在$\mathscr{P}(\boldsymbol{D}(\boldsymbol{H}))$上相对紧）；

（Ⅱ） 证明$\mathscr{L}(X)$是$\{\mathscr{L}(X^n)\}_{n\geqslant 1}$唯一可能的极限点. 这种方法最初是由 Prokhorov 给出的. 事实上，上述两个条件也是$X^n\xrightarrow{\mathscr{L}}X$的充要条件，代替上述两个条件，我们可以给出：

3.2.2 （Ⅰ） 证明$\{X^n\}_{n\geqslant 1}$胎紧；

（Ⅱ） 对于$\boldsymbol{R}_+$的某一稠子集D,证明$X^n\xrightarrow{\mathscr{L}(D)}X$,即

$$(X^n_{t_1},\cdots,X^n_{t_k})\xrightarrow{\mathscr{L}}(X_{t_1},\cdots,X_{t_k}),\quad\forall\ t_i\in D,k\in\boldsymbol{N}.$$

这也是$X^n\xrightarrow{\mathscr{L}}X$的充要条件. 由上述可知要讨论随机过程序列的极限定理，研究其胎紧性是非常重要的步骤.

下面我们就讨论胎紧性，本节我们只给出一般的准则.

3.2.3 定理 设X^n是$\boldsymbol{H}$-值右连左极过程，则$\{X^n\}_{n\geqslant 1}$胎紧的充要条件是：

（Ⅰ） 对任意$N>0,\varepsilon>0$,存在$n_0\in\boldsymbol{N}$和$K>0$使得

$$n\geqslant n_0\Longrightarrow P^n\Big(\sup_{s\leqslant N}\|X^n_s\|>K\Big)\leqslant\varepsilon;$$

（Ⅱ） 对任意$N>0,\varepsilon>0,\eta>0$,存在$n_0\in\boldsymbol{N}$和$\theta>0$使得

$$n\geqslant n_0\Longrightarrow P^n(w'_N(X^n,\theta)\geqslant\eta)\leqslant\varepsilon;$$

（Ⅲ） 对任意$N>0,\varepsilon>0,\eta>0$,存在$n_0,m\in\boldsymbol{N}$使得

$$n\geqslant n_0\Longrightarrow P^n\Big(\sup_{s\leqslant N}\|X^n_s-V_m\Pi_mX^n_s\|\geqslant\eta\Big)\leqslant\varepsilon.$$

证明　必要性　设 $\varepsilon > 0$，由 Prokhorov 定理可推得存在一个紧子集 $\overline{K} \subset \boldsymbol{D}(\boldsymbol{H})$，使得 $P^n(X^n \notin \overline{K}) \leqslant \varepsilon, \forall\, n \geqslant 1$. 对任意 $N > 0, \eta > 0$，定理 2.2.8(b) 可推得 $K = \sup\limits_{s \leqslant N, \alpha \in \overline{K}} \| \alpha(s) \| < \infty$，并且存在 $\theta > 0$ 及 $m \in N$，使得

$$\sup_{\alpha \in \overline{K}} w'_N(\alpha, \theta) \leqslant \eta,\ \sup_{\alpha \in \overline{K}} \sup_{s \leqslant N} \| \alpha(s) - V_m \Pi_m \alpha(s) \| \leqslant \eta. \tag{2.1}$$

因此由(2.1)可得：对 $n \geqslant 1$

$$P^n\left(\sup_{s \leqslant N} \| X_s^n \| > K \right) \leqslant \varepsilon, \tag{2.2}$$

$$P^n(w'_N(X^n, \theta) > \eta) \leqslant \varepsilon, \tag{2.3}$$

$$P^n\left(\sup_{s \leqslant N} \| X_s^n - V_m \Pi_m X_s^n \| > \eta \right) \leqslant \varepsilon, \tag{2.4}$$

即取 $n_0 = 1$ 知条件(Ⅰ)～(Ⅲ)成立.

充分性　假设条件(Ⅰ)～(Ⅲ)成立. 有限族 $\{X^n\}_{n \leqslant n_0}$ 胎紧是显然的，从而存在 $K' < \infty$ 及 $\theta' > 0$ 使得(2.2)～(2.4)成立. 如果以 $K \vee K'$ 代 K 及 $\theta \wedge \theta'$ 代 θ，则条件(Ⅰ)～(Ⅲ)对于 $n_0 = 1$ 成立.

固定 $N > 0, \varepsilon > 0$，取 $K_{\varepsilon N} < \infty, \theta_{\varepsilon k N} > 0$ 及 $m_{\varepsilon N} \in \boldsymbol{N}$ 满足

$$\sup_n P^n\left(\sup_{s \leqslant N} \| X_s^n \| > K_{\varepsilon N} \right) \leqslant \frac{\varepsilon}{3} 2^{-N},$$

$$\sup_n P^n\left(w'_N(X^n, \theta_{\varepsilon k N}) > \frac{1}{k} \right) \leqslant \frac{\varepsilon}{3} 2^{-N},$$

$$\sup_n P^n\left(\sup_{s \leqslant N} \| X_s^n - V_{m_{\varepsilon N}} \Pi_{m_{\varepsilon N}} X_s^n \| > \frac{1}{k} \right) \leqslant \frac{\varepsilon}{3} 2^{-N},$$

则

$$A_{\varepsilon N} = \Big\{ \alpha \in \boldsymbol{D}(\boldsymbol{H}) : \sup_{s \leqslant N} \| \alpha(s) \| \leqslant K_{\varepsilon N}, w'_N(\alpha; \theta_{\varepsilon k N}) \leqslant \frac{1}{k},$$
$$\sup_{s \leqslant N} \| \alpha(s) - V_{m_{\varepsilon N}} \Pi_{m_{\varepsilon N}} \alpha(s) \| \leqslant \frac{1}{k},$$
$$k \geqslant 1 \Big\}$$

满足

$$
\begin{aligned}
&P^n(X^n \notin A_{\varepsilon N}) \\
&\leqslant P^n\left(\sup_{s\leqslant N}\|X^n_s\| > K_{\varepsilon N}\right) + \sum_{k=1}^{\infty} P^n\left(w'_N(X^n,\theta_{\varepsilon kN}) > \frac{1}{k}\right) \\
&\quad + P^n\left(\sup_{s\leqslant N}\|X^n_s - V_{m_{\varepsilon N}}\Pi_{m_{\varepsilon N}}X^n_s\| > \frac{1}{k}\right) \\
&\leqslant \varepsilon 2^{-N}.
\end{aligned}
$$

令 $A_\varepsilon = \bigcap_{N=1}^{\infty} A_{\varepsilon N}$，则 $P^n(X^n \notin A_\varepsilon) \leqslant \varepsilon$. 另一方面 A_ε 满足条件 2.2.4(Ⅰ)～(Ⅲ)，从而由定理 2.2.8(b) 知 A_ε 是 $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{H})$ 的相对紧子集. 故由 Prokhorov 定理可推出 $\{X^n\}_{n\geqslant 1}$ 是胎紧的. 证毕.

3.2.4 定义 随机过程序列 $\{X^n\}_{n\geqslant 1}$ 称为是连续胎紧 (*C-tight*)，如果它是胎紧，并且 $\{\mathscr{L}(X^n)\}_{n\geqslant 1}$ 的所有极限点都是连续过程的分布.

3.2.5 性质 下列叙述等价：

(Ⅰ) 序列 $\{X^n\}_{n\geqslant 1}$ 是连续胎紧；

(Ⅱ) 对于 $\{X^n\}_{n\geqslant 1}$ 定理 3.2.3 中条件(Ⅰ)和(Ⅱ)成立，并且对任意 $N>0, \varepsilon>0, \eta>0$，存在 $n_0 \in \boldsymbol{N}$ 和 $\theta>0$ 使得

$$n \geqslant n_0 \Longrightarrow P^n(w_N(X^n,\theta) > \eta) \leqslant \varepsilon; \tag{2.5}$$

(Ⅲ) 序列 $\{X^n\}_{n\geqslant 1}$ 胎紧，并且对任意 $N>0$ 及 $\varepsilon>0$ 成立

$$\lim_{n\to\infty} P^n\left(\sup_{s\leqslant N}\|\Delta X^n_s\| > \varepsilon\right) = 0. \tag{2.6}$$

证明 (Ⅰ)⇒(Ⅲ)：假设(Ⅰ)成立，则 $\{X^n\}_{n\geqslant 1}$ 是胎紧，因此我们只要证明(2.6)成立. 不失一般性，假设 $X^n \xrightarrow{\mathscr{L}} X$，$X$ 为一连续过程，对任意 $N \notin J(X)$，性质 2.3.10 表明 $\sup_{s\leqslant N}\|\Delta X^n_s\| \xrightarrow{\mathscr{L}} \sup_{s\leqslant N}\|\Delta X_s\|$. 因为 X 连续，所以 $J(X)=\varnothing$ 及 $\sup_{s\leqslant N}\|\Delta X_s\| = 0$，即(2.6)成立.

(Ⅲ)⇒(Ⅰ)：定理 3.2.3 及下述不等式易证结论成立，

$$w_N(\alpha,\theta) \leqslant 2w'_N(\alpha,\theta) + \sup_{s\leqslant N} \| \Delta\alpha(t) \| . \tag{2.7}$$

(Ⅱ)⇒(Ⅰ)：由 $w'_N(\alpha,\theta) \leqslant w_N(\alpha,2\theta)$ 和定理 3.2.3 知 $\{X^n\}_{n\geqslant 1}$ 胎紧. 下面只要证明它的任一极限过程都是连续的. 不妨设 $X^n \xrightarrow{\mathscr{L}} X$，则 X 是 a.s. 连续的. 因为 $\sup\limits_{s\leqslant N} \| \Delta\alpha(s) \| \leqslant w_N(\alpha,\theta)$，(2.5) 表明 $\sup\limits_{s\leqslant N} \| \Delta X^n_s \| \xrightarrow{\mathscr{L}} 0$. 但对于任意 $t \notin J(X)$，$\sup\limits_{s\leqslant t} \| \Delta X^n_s \| \xrightarrow{\mathscr{L}} \sup\limits_{s\leqslant t} \| \Delta X_s \|$，所以对任意 $N > 0$，$\sup\limits_{s\leqslant N} \| \Delta X_s \| = 0$，a.s. 这表明 X 是 a.s. 连续. 证毕.

3.2.6 引理 对于任意的 $n,q \in N$，假设分解

$$X^n = U^{nq} + V^{nq} + W^{nq} \tag{2.8}$$

具有性质：(Ⅰ) 序列 $\{U^{nq}\}_{\{n\geqslant 1\}}$ 胎紧；

(Ⅱ) 序列 $\{V^{nq}\}_{n\geqslant 1}$ 胎紧，并且存在序列 $\{a_q\}_{q\geqslant 1}$ 具有性质 $\lim\limits_{q\to\infty} a_q = 0$，使得 $\lim\limits_{n\to\infty} P^n\left(\sup\limits_{s\leqslant N} \| \Delta V^{nq}_s \| > a_q \right) = 0, \forall\, N > 0$；

(Ⅲ) 对任意的 $N > 0$ 及 $\varepsilon > 0$，

$$\lim_{q\to\infty} \limsup_{n\to\infty} P^n\left(\sup_{s\leqslant N} \| W^{nq}_s \| > \varepsilon \right) = 0.$$

则 $\{X^n\}_{n\geqslant 1}$ 胎紧。

证明 $\{X^n\}_{n\geqslant 1}$ 满足条件 3.2.3(Ⅰ) 是显然的. 容易证明

$$w_N(\alpha,\theta) \leqslant 2 \sup_{s\leqslant N} \| \alpha(t) \| ,$$

$$w'_N(\alpha + \beta,\theta) \leqslant w'_N(\alpha,\theta) + w_N(\beta,2\theta).$$

由这两个不等式及(2.7) 得

$$\begin{aligned} w'_N(X^n,\theta) &\leqslant w'_N(U^{nq} + V^{nq},\theta) + w_N(W^{nq},2\theta) \\ &\leqslant w'_N(U^{nq},\theta) + 2w'_N(V^{nq},2\theta) + \sup_{s\leqslant N} \| \Delta V^{nq}_s \| \\ &\quad + 2 \sup_{s\leqslant N} \| W^{nq}_s \| . \end{aligned}$$

对任意 $\varepsilon > 0, \eta > 0$，取 $q \in \boldsymbol{N}$ 使得 $\limsup\limits_{n\to\infty} P^n\left(\sup\limits_{s\leqslant N} \| W^{nq}_s \| > \eta \right) \leqslant \varepsilon$ 且 $a_q \leqslant \eta$，应用 3.2.3(Ⅱ)，取 $n_0 \in \boldsymbol{N}$ 及 $\theta > 0$，使得当 $n \geqslant n_0$ 时，

$$P^n(w'_N(U^{nq},\theta) > \eta) \leqslant \varepsilon,\ P^n(w'_N(V^{nq},2\theta) > \eta) \leqslant \varepsilon,$$

$$P^n\left(\sup_{s\leqslant N} \| W^{nq}_s \| > \eta\right) \leqslant 2\varepsilon,\ P^n\left(\sup_{s\leqslant N} \| \Delta V^{nq}_s \| > 2\eta\right) \leqslant \varepsilon,$$

则当 $n \geqslant n_0$ 时，$P^n(w'_N(X^n,\theta) > 7\eta) \leqslant 5\varepsilon$. 这表明 $\{X^n\}_{n\geqslant 1}$ 满足条件 3.2.3(Ⅱ). 由不等式

$$\| X^n - V_m \Pi_m X^n \| \leqslant \| U^{nq} - V_m \Pi_m U^{nq} \| + \| V^{nq} - V_m \Pi_m V^{nq} \| + 2 \| W^{nq} \|$$

及条件(Ⅰ)～(Ⅲ)，我们知道 $\{X^n\}_{n\geqslant 1}$ 满足条件 3.2.3(Ⅲ)，从而由定理 3.2.3 知 $\{X^n\}_{n\geqslant 1}$ 胎紧. 证毕.

3.2.7 推论 设 G 是 Hilbert 空间，$\{Y^n\}_{n\geqslant 1}$ 是连续胎紧的 $\boldsymbol{H}$- 值随机过程序列，$\{Z^n\}_{n\geqslant 1}$ 是胎紧(连续胎紧) 的 $\boldsymbol{G}$- 值过程序列.

(Ⅰ) 如果 $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{G}$，则 $\{Y^n + Z^n\}_{n\geqslant 1}$ 胎紧(连续胎紧)；

(Ⅱ) $\boldsymbol{H} \times \boldsymbol{G}$- 值过程序列 $\{(Y^n, Z^n)\}_{n\geqslant 1}$ 胎紧(连续胎紧).

证明 (Ⅰ) 取 $U^{nq} = Z^n, V^{nq} = Y^n, W^{nq} = 0$，利用性质3.2.5 及 3.2.6 即得结论正确.

(Ⅱ) 注意到 $w_N((0,Z^n),\theta) = w_N(Z^n,\theta), w'_N((0,Z^n),\theta) = w'_N(Z^n,\theta)$，利用定理 3.2.3 及性质3.2.5 可知，关于胎紧性(连续胎紧性)$\boldsymbol{H} \times \boldsymbol{G}$- 值过程 $\{(0,Z^n)\}_{n\geqslant 1}$ 与 $\boldsymbol{G}$- 值过程 $\{Z^n\}_{n\geqslant 1}$ 相同. 对于 $\{(Y^n,0)\}_{n\geqslant 1}$ 有同样的结论，因此把(Ⅰ)应用到 $(Y^n,Z^n) = (Y^n,0) + (0,Z^n)$ 即知结论成立. 证毕.

3.3 Aldous 准则

对于 $n \in \boldsymbol{N}$，设 $(\Omega^n, \mathscr{F}^n, \mathscr{F}^n_t, P^n)$ 是带流的概率空间，$(\mathscr{F}^n_t)_{t\geqslant 0}$ 满足"通常条件"，X^n 是定义在其上的 $\boldsymbol{H}$- 值右连左极过程.

3.3.1 定义 称序列 $\{X^n\}_{n\geqslant 1}$ 满足 Aldous 条件[A]，如果

[A] 对任意的 $N > 0, \varepsilon > 0$ 及 $\eta > 0$，存在 $\delta > 0$ 及 $n_0 \in \boldsymbol{N}$，

使得对任意停时序列$\{\tau_n\}_{n\geq 1}$(τ_n 为 $\mathscr{F}_t^n$- 停时),$\tau_n \leqslant N$,

$$\sup_{n\geqslant n_0}\sup_{\theta\leqslant\delta}P^n(\|X_{\tau_n}^n - X_{\tau_n+\theta}^n\| \geqslant \eta) \leqslant \varepsilon. \tag{3.1}$$

称序列$\{X^n\}_{n\geq 1}$满足条件[A'],如果

[A']　对任意的 $N>0,\varepsilon>0$ 及 $\eta>0$,存在 $\delta>0$ 及 $n_0\in \boldsymbol{N}$ 使得对任意的停时序列$\{(\sigma_n,\tau_n)\}_{n\geq 1}$($\sigma_n,\tau_n$ 为 $\mathscr{F}_t^n$- 停时),$\sigma_n\leqslant\tau_n \leqslant N$,

$$\sup_{n\geqslant n_0}P^n\{\|X_{\sigma_n}^n - X_{\tau_n}^n\| \geqslant \eta,\quad \tau_n<\sigma_n+\delta\}\leqslant\varepsilon. \tag{3.2}$$

3.3.2　引理　设 X 是 $\boldsymbol{H}$- 值右连左极过程,τ_1 和 $\tau_2(\tau_1\leqslant\tau_2)$ 是有界随机变量,使得对任意 $\theta\in[0,2\delta]$,

$$P(\|X_{\tau_i}-X_{\tau_i+\theta}\|\geqslant\eta)\leqslant\varepsilon,\qquad i=1,2,$$

则

$$P(\|X_{\tau_1}-X_{\tau_2}\|\geqslant 2\eta,\quad \tau_2<\tau_1+\theta)\leqslant 8\varepsilon.$$

证明　记 $I=[0,2\delta]$. 设 f 是 $\boldsymbol{R}_+$ 上 $\boldsymbol{H}$- 值函数,$0\leqslant t_1\leqslant t_2 < t_1+\delta$. 如果 $\|f(t_1)-f(t_2)\|\geqslant 2\eta$,则集合$\{\theta\in I:\|f(t_i)-f(t_i+\theta)\|\geqslant\eta\}(i=1,2)$ 至少有一个 Lebesgue 测度 $\geqslant\frac{\delta}{2}$.

事实上,如果上述两个集合的 Lebesgue 测度都小于$\frac{\delta}{2}$,则它们关于 I 的余集 $\Delta_i=\{\theta\in I:\|f(t_i)-f(t_i+\theta)\|<\eta\}(i=1,2)$ 的 Lebesgue 测度均 $>\frac{3}{2}\delta$. 但是集合 $t_1+\Delta_1$ 和 $t_2+\Delta_2$ 均包含在$[t_1,t_2+2\delta]$内,而$[t_1,t_2+2\delta]$的测度小于 3δ,因此 $t_1+\Delta_1$ 和 $t_2+\Delta_2$ 必定相交,即存在 t',使得 $\|f(t')-f(t_1)\|<\eta$ 和 $\|f(t')-f(t_2)\|<\eta$,从而 $\|f(t_1)-f(t_2)\|<2\eta$,此与假设矛盾,故上述命题成立. 以 l 表示 Lebesgue 测度,应用上述命题到函数 $X(\omega)$ 及时间 $\tau_i(\omega)(i=1,2)$,我们可得

$$P(\|X_{\tau_1}-X_{\tau_2}\|\geqslant 2\eta,\quad \tau_1\leqslant\tau_2<\tau_1+\delta)$$

$$\leqslant P\left(l\{\theta \in I: \| X_{\tau_1} - X_{\tau_1+\theta} \| \geqslant \eta\} \geqslant \frac{\delta}{2}\right)$$

$$+ P\left(l\{\theta \in I: \| X_{\tau_2} - X_{\tau_2+\theta} \| \geqslant \eta\} \geqslant \frac{\delta}{2}\right). \tag{3.3}$$

由车贝晓夫不等式和 Fubini 定理有

$$P\left(l\{\theta \in I: \| X_{\tau_1} - X_{\tau_1+\theta} \| \geqslant \eta\} \geqslant \frac{\delta}{2}\right)$$

$$\leqslant \frac{2}{\delta}\int_0^{2\delta} P\{\| X_{\tau_1} - X_{\tau_1+\theta} \| \geqslant \eta\} \mathrm{d}\theta \leqslant 4\varepsilon.$$

对(3.3)右端的第二项我们有同样的结果,从而引理得证.

3.3.3 定理(Aldous) 条件[A]和[A']是等价的,并且[A]可推得条件 3.2.3(Ⅱ).

证明 [A']⇒[A]是显然的. 由引理 3.3.2 即得[A]⇒[A']. 往证[A']⇒3.2.3(Ⅱ).

对任意 $n \in \boldsymbol{N}$,定义停时列

$$0 = \tau_0^n, \cdots, \tau_{i+1}^n = \inf\{t: t > \tau_i^n, \| X_t^n - X_{\tau_i^n}^n \| > \eta\}.$$

由定义

$$\{\tau_i^n < N\} \subset \{\| X_{\tau_i^n}^n - X_{\tau_{i-1}^n}^n \| \geqslant \eta\}.$$

由假设存在 $\delta > 0$ 使得 $P^n\{\tau_i^n < N, \tau_i^n < \tau_{i-1}^n + \delta\} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}, \forall\, n \in \boldsymbol{N}$.

取 $q \in \boldsymbol{N}$ 使得 $q\delta \geqslant 2N$,则对任意 $n \in \boldsymbol{N}, P^n(\tau_q^n < N) \leqslant \varepsilon$. 事实上

$$\begin{aligned}
NP^n(\tau_q^n < N) &\geqslant E^n[\tau_q^n; \tau_q^n < N] = \sum_{i=1}^q E[\tau_i^n - \tau_{i-1}^n; \tau_q^n < N] \\
&\geqslant \sum_{i=1}^q \delta P^n\{\tau_q^n < N, (\tau_i^n - \tau_{i-1}^n) \geqslant \delta\} \\
&\geqslant \sum_{i=1}^q \delta[P^n\{\tau_q^n < N\} - P^n\{\tau_q^n < N, \tau_i^n - \tau_{i-1}^n \\
&\quad < \delta\}] \\
&\geqslant q\delta[P^n\{\tau_q^n < N\} - \frac{\varepsilon}{2}]
\end{aligned}$$

由 $q\delta \geqslant 2N$ 即得

$$P^n(\tau_q^n < N) < \varepsilon, \qquad \forall\, n \in \boldsymbol{N}.$$

再利用假设知存在 $\sigma > 0$ 使得

$$P^n(\tau_q^n < N, \tau_i^n < \tau_{i-1}^n + \sigma) \leqslant \frac{\varepsilon}{q}, \qquad \forall\, n \in \boldsymbol{N}.$$

因此

$$P^n\Big(\bigcup_{i=1}^{q}\{\tau_q^n < N, \tau_i^n < \tau_{i-1}^n + \sigma\}\Big) \leqslant \varepsilon, \qquad \forall\, n \in \boldsymbol{N}.$$

但是在集合 $\{\tau_q^n < N\} \setminus \bigcup_{i=1}^{q}\{\tau_q^n < N, \tau_i^n < \tau_{i-1}^n + \sigma\}$ 上，$w'_N(X^n,\sigma) \leqslant \eta$，所以 $P^n(w'_N(X^n,\sigma) \geqslant \eta) \leqslant 2\varepsilon, \forall\, n \in \boldsymbol{N}$. 定理证毕.

3.3.4 注 1978 年，Aldous 给出一个简单的例子表明[A]并非是胎紧的必要条件. 例如取 $X_t^n = 0, 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}$；$X_t^n = 1, \frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1$，则显然有 $\{X^n\}_{n\geqslant 1}$ 胎紧，但[A]并不成立. 对于 $X^n = I_{[\![\tau,\infty[\![}$ (τ 为可料时)，有同样的结论. 一般地，如果 $X^n \xrightarrow{\mathscr{L}} X$，则 X 关于其自然 σ- 域流是拟左连续的. 为了方便，我们考虑最简单情形：$(\Omega^n, \mathscr{F}^n, \mathscr{F}_t^n, P^n) = (\Omega, \mathscr{F}, \mathscr{F}_t, P)$ 及 $X^n = X, n \geqslant 1$，$\{X^n\}$ 显然满足条件 3.2.3(Ⅰ)、(Ⅲ)，它满足[A]的充要条件是 X 拟左连续. 事实上，假设 X 不拟左连续，则存在 $N \in \boldsymbol{N}, \eta > 0, \varepsilon > 0$ 及可料时 $\tau \leqslant N$ 使得 $P(\|\Delta X_\tau\| > 2\eta) \geqslant 3\varepsilon$，又存在 $\delta > 0$ 使得 $P\Big(\sup\limits_{\tau-\delta\leqslant s\leqslant\tau}\|X_s - X_{\tau-}\| > \eta\Big) \leqslant \varepsilon$. 假设停时列 $\{\tau_n\}$ 单调递增收敛于 τ 且 $\tau_n < \tau$，则存在 n 使得 $P(\tau_n < \tau - \delta) \leqslant \varepsilon$ 及

$$\begin{aligned}
&P(\|X_{(\tau_n+\delta)\wedge\tau} - X_{\tau_n}\| > \eta) \\
&\geqslant P\Big(\|\Delta X_\tau\| \geqslant 2\eta, \tau_n \geqslant \tau - \delta, \sup_{\tau-\delta\leqslant s\leqslant\tau}\|X_s - X_{\tau-}\| \leqslant \eta\Big) \\
&\geqslant \varepsilon.
\end{aligned}$$

这与[A]矛盾. 相反的证明是容易的.

3.4 Hilbert 空间值半鞅序列的胎紧性

在这一节里，我们将给出 Hilbert 空间值半鞅序列胎紧性的充分条件.

3.4.1 定义 设 X 和 Y 是定义在同一带流概率空间上的两个可选过程. 称 X 被 Y L-控制，如果对任一有界停时 τ，$E(|X_\tau|) \leqslant E(|Y_\tau|)$.

3.4.2 引理 设 X 是被增过程 A L-控制的右连左极适应过程. 对任意停时 τ，$\varepsilon > 0$，$\eta > 0$，

a）如果 A 可料，则

$$P\left(\sup_{s\leqslant\tau}\|X_s\| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{\eta}{\varepsilon} + P(A_\tau \geqslant \eta); \tag{4.1}$$

b）如果 A 适应，则

$$P\left(\sup_{s\leqslant\tau}\|X_s\| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{1}{\varepsilon}\left[\eta + E\left(\sup_{s\leqslant\tau}\Delta A_s\right)\right] + P(A_\tau \geqslant \eta). \tag{4.2}$$

证明 因为 $P\left(\sup_{s\leqslant\tau}\|X_s\| \geqslant \varepsilon\right) = \lim_{n\to\infty}P\left(\sup_{s\leqslant\tau}\|X_s\| > \varepsilon - \frac{1}{n}\right)$，所以只要对 $P\left(\sup_{s\leqslant\tau}\|X_s\| > \varepsilon\right)$ 证明(4.1)和(4.2)成立.

令 $\tau_n = \tau \wedge n$，则 $\lim_{n\to\infty}P\left(\sup_{s\leqslant\tau_n}\|X_s\| > \varepsilon\right) = P\left(\sup_{s\leqslant\tau}\|X_s\| > \varepsilon\right)$，$\lim_{n\to\infty}P(A_{\tau_n} \geqslant \eta) \leqslant P(A_\tau \geqslant \eta)$ 及 $\lim_{n\to\infty}E\left(\sup_{s\leqslant\tau_n}\Delta A_s\right) = E\left(\sup_{s\leqslant\tau}\Delta A_s\right)$. 因此只要就每个 τ_n 证明(4.1)和(4.2)即可. 换言之，我们可以假设 τ 有界.

记 $\rho = \inf\{s: \|X_s\| > \varepsilon\}$，$\sigma = \inf\{s: A_s \geqslant \eta\}$，则 ρ 为停时，如果 A 可料，σ 为可料时；如果 A 适应，σ 为停时. 而 $\left\{\sup_{s\leqslant\tau}\|X_s\| > \varepsilon\right\} \subset \{A_\tau \geqslant \eta\} \cup \{\rho \leqslant \tau < \sigma\}$，因此

$$P\left(\sup_{s\leqslant\tau}\|X_s\|>\varepsilon\right)\leqslant P(\rho\leqslant\tau<\sigma)+P(A_\tau\geqslant\eta). \quad (4.3)$$

a)　假设 A 可料，则存在停时列 $\sigma_n\uparrow\sigma$，并且在 $\{\sigma>0\}$ 上 $\sigma_n<\sigma$，使得

$$\begin{aligned}P(\rho\leqslant\tau<\sigma)&\leqslant\lim_{n\to\infty}P(\rho\leqslant\tau<\sigma_n)\\&\leqslant\lim_{n\to\infty}P(\|X_{\rho\wedge\tau\wedge\sigma_n}\|\geqslant\varepsilon)\\&\leqslant\frac{1}{\varepsilon}\lim_{n\to\infty}E(A_{\rho\wedge\tau\wedge\sigma_n}).\end{aligned} \quad (4.4)$$

因为在 $\{\sigma>0\}$ 上 $\sigma_n<\sigma$，所以 $A_{\rho\wedge\tau\wedge\sigma_n}\leqslant A_{\sigma_n}\leqslant\eta$，$a.s.$ 故由(4.3)和(4.4)即可推得(4.1)成立.

b)　假设 A 适应，则同(4.4)证明知

$$P(\rho\leqslant\tau<\sigma)\leqslant P(\|X_{\rho\wedge\tau\wedge\sigma}\|\geqslant\varepsilon)\leqslant\frac{1}{\varepsilon}E(A_{\rho\wedge\tau\wedge\sigma}).$$

又由 $A_{\rho\wedge\tau\wedge\sigma}\leqslant\eta+\sup_{s\leqslant\tau}\Delta A_s$，(4.3)可推得(4.2)成立. 证毕.

不等式(4.1)和(4.2)称为 Lenglart 控制不等式.

3.4.3　定理　设 $X^n-X_0^n$ 是局部可积鞅，如果

(Ⅰ)　序列 $\{X_0^n\}_{n\geqslant1}$ 胎紧(在 $\boldsymbol{H}$ 上)，

(Ⅱ)　序列 $\{\langle\langle X^n\rangle\rangle\}_{n\geqslant1}$ 连续胎紧(在 $\boldsymbol{H}\hat{\otimes}_1\boldsymbol{H}$ 上)，

则序列 $\{X^n\}_{n\geqslant1}$ 胎紧.

证明　令 $M^n=X^n-X_0^n$，则 $\|M^n\|^2$ 被可料增过程 $\langle M^n\rangle$ L-控制. 利用 Lenglart 控制不等式得

$$P^n\left(\sup_{s\leqslant N}\|M_s^n\|\geqslant a\right)\leqslant\frac{b}{a^2}+P^n(\langle M^n\rangle_N>b),\ \forall\ N>0.$$

因此

$$P^n\left(\sup_{s\leqslant N}\|X_s^n\|\geqslant 2a\right)\leqslant P^n(\|X_0^n\|\geqslant a)+\frac{b}{a^2}+P^n(\langle M^n\rangle_N\geqslant b). \quad (4.5)$$

因为 $\{\langle\langle M^n\rangle\rangle\}_{n\geqslant1}$ 连续胎紧，所以对任意 $N\in\boldsymbol{N}$，$\varepsilon>0$ 及 $\eta>0$，由定理 3.2.3，性质 3.2.5 和注 2.2.9 知存在 $K>0$，$\theta>0$ 和 $m\in$

N 使得

$$\sup_n P^n\left(\sup_{s\leqslant N}\|《M^n》_s\|_1\geqslant K\right)\leqslant\varepsilon, \tag{4.6}$$

$$\sup_n P^n(w_N(《M^n》,\theta)\geqslant\eta)\leqslant\varepsilon, \tag{4.7}$$

$$\sup_n P^n\left(\sup_{s\leqslant N}\|《M^n》_s-V_{m\times m}\Pi_{m\times m}《M^n》_s\|_1\geqslant\eta\right)\leqslant\varepsilon. \tag{4.8}$$

又由于

$$\langle M^n\rangle_N=\sum_{k=1}^{\infty}\langle M^{nk}\rangle_N=\|《M^n》_N\|_1, \tag{4.9}$$

(4.5) 可推得

$$P^n\left(\sup_{s\leqslant N}\|X_s^n\|\geqslant 2a\right)$$

$$\leqslant P^n(\|X_0^n\|\geqslant a)+\frac{b}{a^2}+P^n\left(\sup_{s\leqslant N}\|《M^n》_s\|_1\geqslant b\right). \tag{4.10}$$

我们先取 $b>K$，再取 a 使得(4.10) 的右端 $\leqslant 2\varepsilon$. 这表明$\{X^n\}_{n\geqslant1}$满足条件 3.2.3(I).

对于 $0\leqslant s<t$，我们有

$$\langle M^n\rangle_t-\langle M^n\rangle_s=\|《M^n》_t-《M^n》_s\|_1.$$

因此 $w_N(\langle M^n\rangle,\theta)=w_N(《M^n》,\theta)$. (4.7) 表明

$$\sup_n P^n(w_N(\langle M^n\rangle,\theta)\geqslant\eta)\leqslant\varepsilon. \tag{4.11}$$

(4.6)、(4.9) 和(4.11) 可推得$\{\langle M^n\rangle\}_{n\geqslant1}$连续胎紧.

设$(\tau_n、\sigma_n)$是$\mathscr{F}_t^n$停时且$\tau_n\leqslant\sigma_n\leqslant N$. 如果令$N_t^n=X_t^n-X_{\tau_n\wedge t}^n$，则 N^n 仍是 $\boldsymbol{H}$- 值局部平方可积鞅，并且 $\|N^n\|^2$ 被$\langle N^n\rangle_t=\langle M^n\rangle_t-\langle M^n\rangle_{\tau_n\wedge t}$ L- 控制. 对任意 $\epsilon>0$ 和 $\eta>0$，再次利用 Lenglart 不等式可得

$$P^n(\|X_{\sigma_n}^n-X_{\tau_n}^n\|\geqslant\epsilon)\leqslant\frac{\eta}{\epsilon^2}+P^n(\langle M^n\rangle_{\sigma_n}-\langle M^n\rangle_{\tau_n}\geqslant\eta). \tag{4.12}$$

$\{\langle M^n\rangle\}_{n\geqslant1}$ 连续胎紧可推得存在 $n_1\in N$ 和 $\theta_0>0$，使得

$$\sup_{n\geqslant n_1}P^n(w_N(\langle M^n\rangle,\theta_0)\geqslant\eta)\leqslant\eta. \tag{4.13}$$

如果上述停时 τ_n,σ_n 还满足 $\sigma_n\leqslant\tau_n+\theta_0$，则当 $w_N(\langle M^n\rangle,\theta_0)\leqslant\eta$ 时，

$$\langle M^n\rangle_{\sigma_n}-\langle M^n\rangle_{\tau_n}\leqslant\eta.$$

所以(4.12)和(4.13)推得

$$\sup_{n\geqslant n_1}\sup_{\substack{\sigma_n\leqslant N\\ \tau_n\leqslant\sigma_n\leqslant\tau_n+\theta_0}}P^n(\|X^n_{\sigma_n}-X^n_{\tau_n}\|\geqslant\eta)\leqslant\frac{\eta}{\varepsilon^2}+\eta.$$

由 $\eta>0$ 的任意性，我们知道 $\{X^n\}_{n\geqslant1}$ 满足条件[A']. 定理 3.3.3 可推得 $\{X^n\}_{n\geqslant1}$ 满足条件 3.2.3(Ⅱ).

最后，因为

$$\begin{aligned}&\|X^n_t-V_m\Pi_mX^n_t\|\\ \leqslant&\|X^n_0-V_m\Pi_mX^n_0\|+\|M^n_t-V_m\Pi_mM^n_t\|,\end{aligned}$$

$\|M^n-V_m\Pi_mM^n\|^2-\sum\limits_{k=m+1}^{\infty}\langle M^{nk}\rangle$ 是实值局部鞅，所以

$\sum\limits_{k=m+1}^{\infty}\langle M^{nk}\rangle$ L- 控制 $\|M^n-V_m\Pi_mM^n\|^2$. 因此

$$\begin{aligned}&P^n\left(\sup_{s\leqslant N}\|X^n_s-V_m\Pi_mX^n_s\|\geqslant2\eta\right)\\ \leqslant&P^n(\|X^n_0-V_m\Pi_mX^n_0\|\geqslant\eta)\\ &+P^n\left(\sup_{s\leqslant N}\|M^n_s-V_m\Pi_mM^n_s\|\geqslant\eta\right)\\ \leqslant&P^n(\|X^n_0-V_m\Pi_mX^n_0\|\geqslant\eta)\\ &+P^n\left(\sup_{s\leqslant N}\|\langle\langle M^n\rangle\rangle_s-V_{m\times m}\Pi_{m\times m}\langle\langle M^n\rangle\rangle_s\|_1\geqslant\varepsilon\right).\end{aligned} \tag{4.14}$$

由条件(Ⅰ)，(4.8)，$\eta>0$ 的任意性及(4.14)可推得当 m 充分大时，$\{X^n\}_{n\geqslant1}$ 满足条件 3.2.3(Ⅲ). 故由定理 3.2.3 知 $\{X^n\}_{n\geqslant1}$ 胎紧. 定理得证.

3.4.4 引理 设 X^n 为 H- 值连续随机过程，P_n 为 X^n 在 $C(H)$ 上的分布. 如果 $\{P_n\}_{n\geqslant1}$ 胎紧，则条件[A]、3.2.3(Ⅰ)及 3.2.

3(Ⅱ)成立，其中 $C(H)$ 是 R_+ 上 H- 值连续函数的全体.

由 $C(H)$ 上紧子集的特征，利用 Ascoling 定理易证上述引理成立.

3.4.5 定理 设 $\{M^n\}_{n\geq 1}$ 是连续的 H- 值局部鞅，并且 $M_0^n = 0$，则下列叙述等价：

a) $\{M^n\}_{n\geq 1}$ 是连续胎紧；

b) 对于 $\{M^n\}_{n\geq 1}$，条件[A]、3.2.3(Ⅰ)和 3.2.3(Ⅱ)成立；

c) $H\hat{\otimes}_2 H$- 值随机过程序列 $\{《M^n》^{\frac{1}{2}}\}_{n\geq 1}$ 连续胎紧；

d) $H\hat{\otimes}_1 H$- 值随机过程序列 $\{《M^n》\}_{n\geq 1}$ 连续胎紧.

证明　引理 3.4.4 给出了 a)⇒b). 由定理 3.2.3，3.3.3 及 $C(H)$ 中拓扑的定义有 b)⇒a).

因为映射 $\Phi: u \to u \circ u$ 是从 $\mathscr{L}_2^{+,s}(H,H)$ 到 $\mathscr{L}_1^{+,s}(H,H)$ 的连续可逆映射，并且其逆映射连续(参见 1.3 第三部分)，所以 $\{《M^n》^{\frac{1}{2}}\}_{n\geq 1}$ 和 $\{《M^n》\}_{n\geq 1}$ 的胎紧性相同，从而 c)⇔d). d)⇒a) 可由定理 3.4.3 给出. 因此，我们只要证明 a)⇒c).

设 τ_n 为 $\mathscr{F}_t^n$ 停时，令

$$Y_t^{n,\tau_n} = \sup_{\tau_n \leq s \leq \tau_n + t} \| M_s^n - M_{\tau_n}^n \|^2.$$

对任意 $\mathscr{F}_t^n$ 停时 σ，利用鞅性可得

$$E[\langle M^n\rangle_{\tau_n+\sigma} - \langle M^n\rangle_{\tau_n}] = E[\| M_{\tau_n+\sigma}^n - M_{\tau_n}^n \|^2]. \qquad (4.15)$$

利用 Lenglart 不等式得

$$P^n\{\langle M^n\rangle_{\tau_n+\theta} - \langle M^n\rangle_{\tau_n} > \eta\} \leq \frac{a}{\eta} + P^n\{Y_\theta^{n,\tau_n} \geq a\}. \quad (4.16)$$

对于任意的 $\varepsilon > 0$，固定 $\eta > 0$，取 a 使得 $\frac{a}{\eta} \leq \frac{\varepsilon}{2}$. 因为 $\{X^n\}_{n\geq 1}$ 连续胎紧，引理 3.4.4 即得对于 $\{X^n\}_{n\geq 1}$ 条件[A]成立，从而可以取 θ 充分小，使得

$$P^n(Y_\theta^{n,\tau_n} \geq a) \leq \frac{\varepsilon}{2}, \qquad \forall\, n \geq 1. \qquad (4.17)$$

又对于 $s \leqslant t$

$$\langle M^n \rangle_t - \langle M^n \rangle_s = Tr[\langle\!\langle M^n \rangle\!\rangle_t - \langle\!\langle M^n \rangle\!\rangle_s] = \| \langle\!\langle M^n \rangle\!\rangle_t - \langle\!\langle M^n \rangle\!\rangle_s \|_1,$$

(4.16) 和(4.17) 表明$\{\langle M^n \rangle\}_{n\geqslant 1}$ 满足条件[A],从而$\{\langle\!\langle M^n \rangle\!\rangle\}_{n\geqslant 1}$ 满足条件[A]. 在(4.16) 中,令 $\tau_n = 0$ 得

$$P^n\{\langle M^n \rangle_t > \eta\} \leqslant \frac{a}{\eta} + P^n\left\{\sup_{s\leqslant t} \| M_s^n \|^2 \geqslant a\right\}. \tag{4.18}$$

这表明$\{\langle\!\langle M^n \rangle\!\rangle^{\frac{1}{2}}\}_{n\geqslant 1}$ 满足条件 3.2.3(Ⅰ). 往证$\{\langle\!\langle M^n \rangle\!\rangle^{\frac{1}{2}}\}_{n\geqslant 1}$ 满足条件 3.2.3(Ⅲ),即证明对任意$\epsilon > 0, \eta > 0$ 存在$\boldsymbol{H} \hat{\otimes}_2 \boldsymbol{H}$ 的有限维子空间 $G_{\epsilon,\eta}$,使得

$$P^n\left\{\sup_{s\leqslant N} \| \langle\!\langle M^n \rangle\!\rangle_s^{\frac{1}{2}} - P_{\epsilon,\eta} \langle\!\langle M^n \rangle\!\rangle_s^{\frac{1}{2}} \|_2 > \eta\right\} \leqslant \epsilon, \forall\ n \geqslant 1, \tag{4.19}$$

其中$P_{\epsilon,\eta}$ 为$\boldsymbol{H} \hat{\otimes}_2 \boldsymbol{H}$ 在$G_{\epsilon,\eta}$ 上的正交投影. 由$\{M^n\}_{n\geqslant 1}$ 的胎紧性知存在 $\boldsymbol{H}$ 的有限维子空间 $\boldsymbol{H}_{\epsilon,a}$ 使得

$$P^n\left\{\sup_{s\leqslant N} \| M_s^n - P_{\boldsymbol{H}_{\epsilon,a}} M_s^n \| \geqslant a\right\} \leqslant \frac{\epsilon}{2} \tag{4.20}$$

显然对任意停时 τ_n

$$E^n[\langle M^n - P_{\boldsymbol{H}_{\epsilon,a}} M^n \rangle_{\tau_n}] \leqslant E^n\left(\sup_{s\leqslant \tau_n} \| M_s^n - P_{\boldsymbol{H}_{\epsilon,a}} M_s^n \|^2\right),$$

利用 Lenglart 不等式,我们有

$$\begin{aligned} &P^n(\langle M^n - P_{\boldsymbol{H}_{\epsilon,a}} M^n \rangle_{\tau_n} > \eta) \\ &\leqslant \frac{a}{\eta} + P^n\left(\sup_{s\leqslant \tau_n} \| M_s^n - P_{\boldsymbol{H}_{\epsilon,a}} M_s^n \|^2 \geqslant a\right) \leqslant \frac{a}{\eta} + \frac{\epsilon}{2}. \end{aligned}$$

利用这种方法,我们可以取得 $\boldsymbol{H}$ 的有限维子空间 $\boldsymbol{H}_{\epsilon,a}$,使得

$$P^n(\langle M^n - P_{\boldsymbol{H}_{\epsilon,a}} M^n \rangle_t \geqslant \eta) \leqslant \epsilon, \qquad \forall\ t \leqslant N. \tag{4.21}$$

这表明

$$P^n(\langle P_{\boldsymbol{H}_{\epsilon,a}^{\perp}} M^n \rangle_t \geqslant \eta) \leqslant \epsilon, \qquad \forall\ t \leqslant N, \tag{4.22}$$

其中 $\boldsymbol{H}_{\epsilon,a}^{\perp}$ 是 $\boldsymbol{H}_{\epsilon,a}$ 的正交补子空间. 令 $\boldsymbol{H}_1 = \boldsymbol{H}_{\epsilon,a}, \boldsymbol{H}_2 = \boldsymbol{H}_{\epsilon,a}^{\perp}$,则 $\boldsymbol{H} \hat{\otimes}_2 \boldsymbol{H} = \sum_{i,j=1}^{2} \boldsymbol{H}_i \hat{\otimes}_2 \boldsymbol{H}_j$ 为其正交分解. 记 $P_{\boldsymbol{H}_i \hat{\otimes}_2 \boldsymbol{H}_j}$ 为 $\boldsymbol{H} \hat{\otimes}_2 \boldsymbol{H}$ 在其

子空间 $\boldsymbol{H}_i\hat{\otimes}_2\boldsymbol{H}_j$ 上的正交投影，P_i 为 $\boldsymbol{H}$ 在 $\boldsymbol{H}_i$ 上的正交投影，则

$$\langle\!\langle M^n\rangle\!\rangle_t^{\frac{1}{2}}=\sum_{i,j=1}^{2}P_i\circ\langle\!\langle M^n\rangle\!\rangle_t^{\frac{1}{2}}\circ P_j. \tag{4.23}$$

但是

$$\|P_i\circ\langle\!\langle M^n\rangle\!\rangle_t^{\frac{1}{2}}\circ P_j\|_2^2\leqslant\|P_i\circ\langle\!\langle M^n\rangle\!\rangle_t^{\frac{1}{2}}\|_2^2$$
$$=TrP_i\circ\langle\!\langle M^n\rangle\!\rangle_t\circ P_i=\langle P_iM^n\rangle_t,$$

不等式(4.21)和(4.22)可推得

$$P^n(\|P_i\circ\langle\!\langle M^n\rangle\!\rangle_t^{\frac{1}{2}}\circ P_{H_{\varepsilon,a}^{\perp}}\|_2^2\geqslant\eta)\leqslant\varepsilon,\quad\forall\, t\leqslant N, i=1,2,$$
$$P^n(\|P_{H_{\varepsilon,a}^{\perp}}\circ\langle\!\langle M^n\rangle\!\rangle_t^{\frac{1}{2}}\circ P_i\|_2^2\geqslant\eta)\leqslant\varepsilon,\quad\forall\, t\leqslant N, i=1,2.$$

按照正交分解(4.23)，我们有

$$P^n(\|\langle\!\langle M^n\rangle\!\rangle_t^{\frac{1}{2}}-P_{H_{\varepsilon,a}\hat{\otimes}_2H_{\varepsilon,a}}\langle\!\langle M^n\rangle\!\rangle_t^{\frac{1}{2}}\|_2^2\leqslant\eta)\leqslant 3\varepsilon,\quad\forall\, t\leqslant N.$$

这表明对 $G_{\varepsilon,\eta}=\boldsymbol{H}_{\varepsilon,a}\hat{\otimes}_2\boldsymbol{H}_{\varepsilon,a}$，(4.19) 成立. 定理得证.

3.4.6 引理 设 X^n 是 $\boldsymbol{H}$- 值右连左极过程.

a) 对任意的 $N>0$ 和 $a>0$，下列叙述等价：

(Ⅰ) $\lim\limits_{n\to\infty}P^n\left(\sup\limits_{s\leqslant N}\|\Delta X_s^n\|>a\right)=0$,

(Ⅱ) $\lim\limits_{n\to\infty}P^n(\nu^n([0,N]\times\{\|x\|>a\})>\varepsilon)=0, \forall\,\varepsilon>0.$

b) 对任意的 $N>0$，下列叙述等价：

(Ⅰ) $\lim\limits_{a\to\infty}\limsup\limits_{n\to\infty}P^n\left(\sup\limits_{s\leqslant N}\|\Delta X_s^n\|>a\right)=0$,

(Ⅱ) $\lim\limits_{a\to\infty}\limsup\limits_{n\to\infty}P^n(\nu^n([0,N]\times\{\|x\|>a\})>\varepsilon)=0$,

$\forall\,\varepsilon>0.$

证明 这是 Lenglart 控制定理的简单推论. 事实上，令

$$A_t^n=\sum_{0<s\leqslant t}I_{\{\|\Delta X_s^n\|>a\}},$$

$$\widetilde{A}_t^n=\nu^n([0,t]\times\{x\in\boldsymbol{H}:\|x\|>a\}),$$

则 $\widetilde{A}^n$ 是 A^n 的可料对偶投影，因此 A^n 是 $\widetilde{A}^n$ 的 L- 控制，且 $\widetilde{A}^n$ 也是 A^n 的 L- 控制. 应用 Lenglart 不等式 3.4.2(a) 可得

$$P^n(A_N^n \geqslant 1) \leqslant \varepsilon + P^n(\widetilde{A}_N^n \geqslant \varepsilon).$$

因为 $\{A_N^n \geqslant 1\} = \left\{\sup_{s\leqslant N} \|\Delta X^n\| > a\right\}$，所以我们可以推得（Ⅱ）⇒（Ⅰ）在 a）和 b）两种情况下都成立.

再利用 Lenglart 不等式 3.4.2(b) 可得

$$P^n(\widetilde{A}_N^n \geqslant \varepsilon) \leqslant \rho + \frac{1}{\varepsilon}E^n\left(\sup_{s\leqslant N}\Delta A_s^n\right) + P^n(A_N^n \geqslant \varepsilon\rho). \quad (4.24)$$

但是 $\Delta A^n \leqslant 1$，$\left\{\sup_{s\leqslant N}\Delta A_s^n > 0\right\} = \{A_N^n \geqslant \varepsilon\rho \wedge 1\} = \left\{\sup_{s\leqslant N} \|\Delta X_s^n\| > a\right\}$，因此由(4.24)，我们有

$$P^n(\widetilde{A}_N^n \geqslant \varepsilon) \leqslant \rho + \left(\frac{1}{\varepsilon} + 1\right) P^n\left(\sup_{s\leqslant N} \|\Delta X_s^n\| > a\right),$$

由 $\varepsilon > 0$ 和 $\rho > 0$ 的任意性，我们可推得（Ⅰ）⇒（Ⅱ）在 a）和 b）两种情况下都成立. 引理证毕.

3.4.7 定理 设 $\{X^n\}_{n\geqslant 1}$ 为 $\boldsymbol{H}$-值半鞅序列，$\{X^n\}_{n\geqslant 1}$ 胎紧的充分条件是：

（Ⅰ） $\{X_0^n\}_{n\geqslant 1}$ 是胎紧的(在 $\boldsymbol{H}$ 内)；

（Ⅱ） 对任意的 $N > 0$ 和 $\varepsilon > 0$

$$\lim_{a\to\infty}\limsup_{n\to\infty} P^n\left(\nu^n([0,N] \times \{\|x\| > a\}) > \varepsilon\right) = 0; \quad (4.25)$$

（Ⅲ） 对任意的 $N > 0, \varepsilon > 0, \eta > 0$ 和 $p \in \boldsymbol{N}$，存在 n_0，$m \in \boldsymbol{N}$，使得

$$n \geqslant n_0 \Longrightarrow P^n(g_p \circ (I - V_m\Pi_m).\nu_N^n \geqslant \eta) \leqslant \varepsilon; \quad (4.26)$$

（Ⅳ） 下列每个随机过程列都是连续胎紧：

(1) $\{B^n\}_{n\geqslant 1}$，

(2) $\{\widetilde{C}^n\}_{n\geqslant 1}$，

(3) $\{g_p.\nu^n\}_{n\geqslant 1}$， $\forall\ p \in \boldsymbol{N}$，

其中 $g_p(x) = (p\|x\| - 1)^+ \wedge 1$，$I$ 是 $\boldsymbol{H}$ 上的恒等变换.

进一步，我们有条件（Ⅰ）、（Ⅱ）和（Ⅲ）也是 $\{X^n\}_{n\geqslant 1}$ 胎紧的必

要条件.

3.4.8 定义 设 X 和 Y 是定义在同一概率空间上的两个增过程,称 X 强控制于 Y,记为 $Y \prec X$,如果 $X - Y$ 仍是增过程.

3.4.9 引理 条件3.4.7(Ⅳ)不依赖于截尾函数 h 的选择,其中 h 满足条件:$h(x)$ 的第 i 个坐标 $h^i(x)$ 仅依赖于 x 的第 i 个坐标 x^i.

证明 假设 3.4.7(Ⅳ)对满足引理条件的 h 成立,h_1 是与 h 有相同性质的截尾函数,则存在常数 $a > 0$、$b > 0$,使得 $\|h\| \leqslant a$,$\|h_1\| \leqslant a$,并且 $h(x) = h_1(x) = x$,$\|x\| \leqslant b$. 取 $p \in N$ 使得 $2/p \leqslant b$. 容易估计 $\|h - h_1\| \leqslant 2apg_p$,$\|h^{\otimes 2} - h_1^{\otimes 2}\|_1 \leqslant 2a^2pg_p$,由 $\{g_p . \nu^n\}_{n\geqslant 1}$ 的连续胎紧性可推出 $\{\|h - h_1\| . \nu^n\}_{n\geqslant 1}$ 和 $\{\|h^{\otimes 2} - h_1^{\otimes 2}\|_1 . \nu^n\}_{n\geqslant 1}$ 也是连续胎紧. 因此 $\{(h - h_1) . \nu^n\}_{n\geqslant 1}$ 和 $\{(h^{\otimes 2} - h_1^{\otimes 2}) . \nu^n\}_{n\geqslant 1}$ 均满足条件 3.2.3(Ⅰ).

因为

$$
\begin{aligned}
&\|(h - h_1) - V_m\Pi_m(h - h_1)\| \\
&\leqslant 2apg_p \circ (I - V_m\Pi_m)(\cdot),
\end{aligned}
\tag{4.27}
$$

及

$$
\begin{aligned}
&\sup_{s,t\in J} \|(h - h_1) . \nu_t^n - (h - h_1) . \nu_s^n\| \\
&\leqslant \sup_{s,t\in J} \|\Pi_m[(h - h_1) . \nu_t^n - (h - h_1) . \nu_s^n]\| \\
&\quad + \sup_{s,t\in J} \|(I - V_m\Pi_m)[(h - h_1) . \nu_t^n - (h - h_1) . \nu_s^n]\| \\
&\leqslant \sup_{s,t\in J} \|\Pi_m[(h - h_1) . \nu_t^n - (h - h_1) . \nu_s^n]\| \\
&\quad + 4ap \sup_{t\in J}[g_p \circ (I - V_m\Pi_m)] . \nu_t^n,
\end{aligned}
\tag{4.28}
$$

其中 J 为 $\boldsymbol{R}_+$ 的子区间,$\{\|h - h_1\| . \nu^n\}_{n\geqslant 1}$ 连续胎紧可推出 $\{\|\Pi_m(h - h_1)\| . \nu^n\}_{n\geqslant 1}$ 连续胎紧,从而 $\{[\Pi_m(h - h_1)] . \nu^n\}_{n\geqslant 1}$ 连续胎紧. (4.26) 和 (4.27) 可推出 $\{(h - h_1) . \nu^n\}_{n\geqslant 1}$,满足条件 3.2.3(Ⅱ) 和 (2.5). (4.28) 和性质 3.2.5(Ⅱ) 表明 $\{(h - h_1) . \nu^n\}_{n\geqslant 1}$ 是连续胎紧.

由于 $B^n(h_1) = B^n(h) + (h_1 - h).\nu^n$，推论 3.2.7(Ⅰ)表明序列$\{B^n(h_1)\}_{n\geq 1}$是连续胎紧.

再由性质 1.4.10，我们有

$$\langle\langle X^n(h_1)\rangle\rangle = \langle\langle X^n(h)\rangle\rangle + (h_1^{\otimes 2} - h^{\otimes 2}).\nu^n + \sum_{s\leq \cdot}\{[\Delta B^n(h_1)_s]^{\otimes 2} - [\Delta B^n(h)_s]^{\otimes 2}\}. \quad (4.29)$$

不失一般性，我们假设 $a > 1$. 容易估计不等式：

$$\begin{aligned}&\| h_1^{\otimes 2} - h^{\otimes 2} - V_{m\times m}\Pi_{m\times m}[h_1^{\otimes 2} - h^{\otimes 2}] \|_1 \\ \leq &\| (h_1 - V_m\Pi_m h_1)^{\otimes 2} - (h - V_m\Pi_m h)^{\otimes 2} \|_1 \\ &+ \| (h_1 - V_m\Pi_m h_1) \otimes (V_m\Pi_m h_1) \\ &- (h - V_m\Pi_m h) \otimes (V_m\Pi_m h) \|_1 \\ &+ \| (V_m\Pi_m h_1) \otimes (h_1 - V_m\Pi_m h_1) \\ &- (V_m\Pi_m h) \otimes (h - V_m\Pi_m h) \|_1 \\ \leq & 6a^2 p g_p \circ (I - V_m\Pi_m)(\cdot). \end{aligned} \quad (4.30)$$

如果记 $G^n = \sum_{s\leq \cdot}\{[\Delta B^n(h_1)_s]^{\otimes 2} - [\Delta B(h)_s]^{\otimes 2}\}$，则我们有

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(G^n) &\prec \sum_{s\leq \cdot} \| [\Delta B^n(h_1)_s]^{\otimes 2} - [\Delta B^n(h)_s]^{\otimes 2} \|_1 \\ &= \sum_{s\leq \cdot} \| E^n\{[\Delta X^n(h_1)_s]^{\otimes 2} - [\Delta X^n(h)_s]^{\otimes 2} | \mathscr{F}_{s-}\} \|_1 \\ &= \sum_{s\leq \cdot} \| E^n\{[h_1(\Delta X_s^n)]^{\otimes 2} - [h(\Delta X_s^n)]^{\otimes 2} | \mathscr{F}_{s-}\} \|_1 \\ &\prec 2a^2 p \sum_{s\leq \cdot} E^n[g_p(\Delta X_s^n) | \mathscr{F}_{s-}^n] \\ &\prec 2a^2 p \int_0^{\cdot}\int_H g_p(x)\nu^n(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x). \end{aligned} \quad (4.31)$$

同(4.30)和(4.31)的估计相似，我们有

$$\begin{aligned}&\| G^n - V_{m\times m}\Pi_{m\times m}G^n \|_1 \\ \prec & 6a^2 p \int_0^{\cdot}\int_H g_p(x - V_m\Pi_m x)\nu^n(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x). \end{aligned} \quad (4.32)$$

$\{\| h^{\otimes 2} - h_1^{\otimes 2} \|_1 .\nu^n\}_{n\geq 1}$ 连续胎紧可推出$\{\Pi_{m\times m}[h^{\otimes 2} - h_1^{\otimes 2}].\nu^n\}_{n\geq 1}$连续胎紧，从而(4.30)可得$\{[h^{\otimes 2} - h_1^{\otimes 2}].\nu^n\}_{n\geq 1}$连续胎紧，(4.31)

和 (4.32) 可推出 $\{G^n\}_{n\geqslant 1}$ 是连续胎紧. 故由推论 3.2.7 知 $\{《X^n(h_1)》\}_{n\geqslant 1}$ 是连续胎紧. 引理证毕.

定理 3.4.7 的证明　a)　首先我们证明充分性. 固定具有引理 3.4.9 中性质的截尾函数 h, 对任意的 $q\in N$, 令 $h_q(x) = qh(x/q)$, 则 $h_q(x)$ 仍是截尾函数. 记

$$U^{nq} = X_0^n + M^n(h_q), V^{nq} = B^n(h_q), W^{nq} = \check{X}(h_q)$$

则有 $X^n = U^{nq} + V^{nq} + W^{nq}$.

首先, 引理 3.4.9 表明序列 $\{V^{nq}\}_{n\geqslant 1}$ 是连续胎紧. 如果取 $a_q = 1/q$, 则 $\{V^{nq}\}_{n\geqslant 1}$ 满足条件 3.2.6(Ⅱ). 其次, 引理 3.4.9 也表明 $\{《M^n(h_q)》\}_{n\geqslant 1}$ 是连续胎紧, 因此由定理 3.4.3 可推出序列 $\{U^{nq}\}_{n\geqslant 1}$ 胎紧. 再其次, 存在常数 $a>0$ 使得当 $\|x\|\leqslant a$ 时, $h(x) = x$, 所以当 $\|x\|\leqslant aq$ 时, $h_q(x) = x$, 由 $\check{X}(h_q)$ 的定义和条件 (Ⅱ), 我们有

$$\begin{aligned}
&\limsup_{n\to\infty} P^n\left(\sup_{s\leqslant N}\|W_s^{nq}\| > 0\right) \\
&\leqslant \lim_{q\to\infty}\limsup_{n\to\infty} P^n\left(\sup_{s\leqslant N}\|\Delta X_s^n\| \geqslant aq\right) \\
&\leqslant \lim_{q\to\infty}\limsup_{n\to\infty} P^n(\upsilon^n([0,N]\times\{\|x\|\geqslant aq\}) > \varepsilon) \\
&= 0, \quad \forall\, \varepsilon > 0.
\end{aligned}$$

因此 $\{W^{nq}\}_{n\geqslant 1}$ 满足条件 3.2.6(Ⅲ), 故由引理 3.2.6, 我们知道 $\{X^n\}_{n\geqslant 1}$ 是胎紧.

b)　反之, 我们假设 $\{X^n\}_{n\geqslant 1}$ 是胎紧, 则定理 3.2.3 表明

$$\lim_{a\to\infty}\limsup_{n\to\infty} P^n\left(\sup_{s\leqslant N}\|X_s^n\| > a\right) = 0, \qquad \forall\, N > 0,$$

因此条件 (Ⅰ) 成立. 因为 $\|\Delta X_t^n\| \leqslant 2\sup_{s\leqslant t}\|X_s^n\|$, 由引理 3.4.6(b) 知条件 (Ⅱ) 成立. 最后证明条件 (Ⅲ) 成立. 令

$$A_t^n = \sum_{s\leqslant t} I_{\{\|\Delta X_s^n - V_m\Pi_\infty(\Delta X_s^n)\|\geqslant\frac{1}{p}\}},$$

$$\widetilde{A}_t^n = \nu^n\left([0,t] \times \left\{x - V_m\Pi_m x: \| x - V_m\Pi_m x \| \geqslant \frac{1}{p}\right\}\right),$$

则$\widetilde{A}^n$ 是 A^n 的可料对偶投影. 因此 A^n 被$\widetilde{A}^n$ L- 控制. 因为

$$g_p \circ (I - V_m\Pi_m).\mu_t^n = \sum_{s\leqslant t}(p \| \Delta X_s^n - V_m\Pi_m(\Delta X_s^n) \| - 1)^+ \wedge 1$$

被$\widetilde{A}^n$ L- 控制,并且

$$\sup_{s\leqslant t} \| \Delta X_s^n - V_m\Pi_m(\Delta X_s^n) \| \leqslant 2 \sup_{s\leqslant t} \| X_s^n - V_m\Pi_m X_s^n \|,$$

所以由$\{X^n\}_{n\geqslant 1}$ 的胎紧性,条件 3.2.3(Ⅲ) 及 3.4.6(a),我们有

$$\lim_{m\to\infty} \limsup_{n\to\infty} P^n\left(\widetilde{A}_t^n > \varepsilon\right) = 0. \tag{4.33}$$

利用 Lenglart 不等式可得

$$\lim_{m\to\infty} \limsup_{n\to\infty} (g_p \circ (I - V_m\Pi_m).\mu_t^n > \varepsilon) = 0, \quad \forall\, \varepsilon > 0.$$

注意到 $g_p \circ (I - V_m\Pi_m).\nu^n$ 被 $g_p \circ (I - V_m\Pi_m).\mu^n$ L- 控制,我们证明了结论成立. 定理证毕.

3.5 实值过程序列胎紧性的另一种描述

设 $\alpha \in \boldsymbol{D}(\boldsymbol{R})$,对任意的 $\delta > 0, N > 0$,定义

$$w(\alpha,[a,b]) = \sup_{a\leqslant s,t\leqslant b} |\alpha(t) - \alpha(s)|,$$

$$w''(\alpha,\delta,N) = \sup\{|\alpha(t_1) - \alpha(t_2)| \wedge |\alpha(t_2) - \alpha(t_3)|: \\ 0 \leqslant t_1 < t_2 < t_3 \leqslant N, t_3 - t_1 \leqslant \delta\}.$$

仿照 P. Billingsley[3](用 $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{R})$ 代替 $\boldsymbol{D}([0,1])$) 的定理 15.3 的证明我们可得如下命题:

3.5.1 定理 设 X^n 为$(\Omega^n, \mathscr{F}^n, \mathscr{F}_t^n, P^n)$上的右连左极实值过程,则$\{X^n\}_{n\geqslant 1}$ 是胎紧的充要条件是:

(Ⅰ) 对任意的 $\varepsilon > 0, N > 0$,存在 $K > 0$ 使得

$$P^n\left(\left\{\sup_{t\leqslant N} |X_t^n| > K\right\}\right) < \varepsilon, \quad \forall\, n \geqslant 1,$$

(Ⅱ) 对任意的 $\varepsilon>0,\eta>0$ 及 $N>0$，存在 $\delta>0(\delta<N)$ 及整数 n_0 使得

$$\begin{cases}P^n(\{w''(X^n,\delta,N)\geqslant\varepsilon\})<\eta, & n\geqslant n_0,\\ P^n(\{w(X^n,[0,\delta))\geqslant\varepsilon\})<\eta, & n\geqslant n_0,\\ P^n(\{w(X^n,[N-\delta,N))\geqslant\varepsilon\})<\eta, & n\geqslant n_0.\end{cases}$$

3.5.2 定理 (Ⅰ) 设 $\{X^n\}_{n\geqslant1}$ 为定义在 $(\Omega,\mathscr{F},\mathscr{F}_t,P)$ 上的右连左极随机过程序列. 假设存在三个正的常数序列 $(\delta^i)_{i\geqslant1}$、$(\rho_j^i)_{i,j\geqslant1}$、$(q_j)_{j\geqslant1}$，它们分别满足条件：当 $i\to\infty$ 时 $\delta^i\to0,\rho_j^i\to0$；当 $j\to\infty$ 时，$q_j\to\infty$，并且对于任意固定的 $i\geqslant1$，存在 $\boldsymbol{R}_+$ 的一个停时分割 $((\sigma_{nk}^i))_{n\geqslant1}$，$0=\sigma_{n0}^i<\sigma_{n1}^i<\cdots$，$\lim\limits_{k\to\infty}\sigma_{nk}^i=\infty$ 使得对任意的 $j\geqslant1$，

$$\lim_{i\to\infty}\overline{\lim_{n\to\infty}}P\Big(\max_{k\in D_{nj}^i}(\sigma_{n,k+1}^i-\sigma_{nk}^i)>\delta^i\Big)=0,\tag{5.1}$$

$$\lim_{i\to\infty}\overline{\lim_{n\to\infty}}P\Big(\min_{k\in D_{nj}^i}(\sigma_{n,k+1}^i-\sigma_{nk}^i)\leqslant\rho_j^i\Big)=0,\tag{5.2}$$

其中 $D_{nj}^i=\{k:\sigma_{n,k+1}^i\leqslant q_j\},i,j,n\in\boldsymbol{N}$.

如果下列条件满足：

$$\Big\{\sup_{t\leqslant q_j}|X_t^n|\Big\}_{n\geqslant1}\ \text{胎紧},\qquad\forall\ j\geqslant1,\tag{5.3}$$

$$\lim_{i\to\infty}\overline{\lim_{n\to\infty}}P\Big(\sup_{t\leqslant\delta^i}|X_t^n|\geqslant\varepsilon\Big)=0,\qquad\forall\ \varepsilon>0,\tag{5.4}$$

$$\lim_{i\to\infty}\overline{\lim_{n\to\infty}}P\Big(\max_{k\in D_{nj}^i}\sup_{\sigma_{nk}^i\leqslant t<\sigma_{n,k+1}^i}\big|X_t^n-X_{\sigma_{nk}^i}^n\big|\geqslant\varepsilon\Big)=0,$$
$$\forall\ \varepsilon>0,j\in\boldsymbol{N}.\tag{5.5}$$

则 $\{X^n\}_{n\geqslant1}$ 在 $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{R})$ 中胎紧.

(Ⅱ) 相反地，如果 $\{X^n\}_{n\geqslant1}$ 弱收敛，则存在常数族 (δ^i)、(q_j)、(ρ_j^i) 和停时族 $((\sigma_{nk}^i))$ 使得条件(5.1)～(5.5)全部成立.

证明 (Ⅰ) 假设条件(5.1)～(5.5)成立，则在集合

$\left\{\min\limits_{k\in D_{nj}^i}(\sigma_{n,k+1}^i-\sigma_{n,k}^i)>\rho_j^i\right\}$ 上

$$w''(X^n,\rho_j^i,q_j-\delta^i)\leqslant 2w(X^n,i,q_j).$$

其中

$$w(X^n,i,q_j)=\max_{k\in D_{nj}^i}\sup_{\sigma_{nk}^i\leqslant t<\sigma_{n,k+1}^i}|X_t^n-X_{\sigma_{nk}^i}^n|,\qquad i,j,n\in\boldsymbol{N}.$$

因此对于 $\delta^i\leqslant 1$，我们有

$$\begin{aligned}&P(w''(X^n,\rho_j^i,q_j-1)\geqslant\varepsilon)\\&\leqslant P\left(w(X^n,i,q_j)\geqslant\frac{\varepsilon}{2}\right)+P\left(\min_{k\in D_{nj}^i}(\sigma_{n,k-1}^i-\sigma_{nk}^i)\leqslant\rho_j^i\right).\end{aligned}$$

对任意的 $\varepsilon>0,j\in\boldsymbol{N}$，由(5.2)和(5.5)可推得

$$\lim_{i\to\infty}\overline{\lim_{n\to\infty}}P(w''(X^n,\rho_j^i,q_j-1)\geqslant\varepsilon)=0.\tag{5.6}$$

所以定理 3.5.1 中的条件全部满足，故 $\{X^n\}_{n\geqslant 1}$ 在 $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{R})$ 中是胎紧的.

(Ⅱ) 假设 $X^n\xrightarrow{\mathscr{L}}X^\infty$. 设 $(\delta^i)_{i\geqslant 1}$ 为常数序列，$\delta^i\downarrow 0,i\uparrow\infty$，使得 $P(|\Delta X_t|=\delta^i,t\geqslant 0)=0,\forall\ i\geqslant 1$.

任意固定 $i\geqslant 1$，定义

$$\sigma_{n0}^i=0,\sigma_{n,k+1}^i=\inf\{\sigma_{nk}^i+\delta_k^i,\inf\{t>\sigma_{nk}^i:|\Delta X_t^n|>\delta^i\}\},\tag{5.7}$$

其中 $\{\delta_k^i\}_{i,k\geqslant 1}$ 是满足下述条件的常数列，$\delta^i/2\leqslant\delta_k^i\leqslant\delta^i$，并且 $P(\{\Delta X_{\sigma_{\infty k}^i+\delta_k^i}^\infty=0\})=1,n\geqslant 1,k\geqslant 0$.

通过简单计算可得不等式

$$w(X^n,i,q)\leqslant\delta^i+2w'_q(X^n,\delta^i).\tag{5.8}$$

取 X^∞ 的连续点序列 $\{q_j\}_{j\geqslant 1},q_j\to\infty$，即 $\{q_j\}_{j\geqslant 1}\subset\mathrm{Cont}X^\infty=\{q:P(\Delta X_q^\infty=0)=1\}$. 因为

$$\lim_{i\to\infty}\overline{\lim_{n\to\infty}}P(\{w'_{q_j}(X^n,\delta^i)\geqslant\varepsilon\})=0,\forall\ \varepsilon>0,j\geqslant 1,\tag{5.9}$$

由(5.8)可推得条件(5.5)被满足. 定理 3.5.1 表明条件(5.3)和

(5.4) 被满足.

由 σ^i_{nk} 的定义容易看出:对任意的 $i \geqslant 1$,

$$(\sigma^i_{n0}, \sigma^i_{n1}, \cdots) \xrightarrow{\mathscr{L}} (\sigma^i_{\infty,0}, \sigma^i_{\infty,1}, \cdots).$$

因此对任意固定的 $j \geqslant 1$,

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} P\left(\left\{\min_{k\in D^i_{nj}} (\sigma^i_{n,k+1} - \sigma^i_{nk}) \leqslant \rho^i_j\right\}\right)$$

$$\leqslant P\left(\left\{\min_{k\in D^i_{\infty,j}} (\sigma^i_{\infty,k+1} - \sigma^i_{\infty k}) \leqslant \rho^i_j\right\}\right).$$

因为 $0 = \sigma^i_{\infty,0} < \sigma^i_{\infty,1} < \cdots$,并且 $\max\{k : k \in D^i_{\infty,j}\} < \infty$ 几乎处处成立,所以我们可以取序列 $\{\rho^i_j\}_{j\geqslant 1}, \rho^i_j \to 0, j \uparrow \infty$,使得条件(5.2)成立. 由 $\sigma^i_{n,k}$ 的取法知(5.1)成立,命题得证.

4 半鞅序列的弱收敛

本章主要研究半鞅的极限定理及其在跳跃 Markov 过程和 Markov 链中的应用，同时也讨论随机积分的弱收敛性. 主要取材于[8,16,17,35,40,44,47,48,50].

4.1 有限维空间值半鞅序列的极限定理

本节我们罗列了 $\mathbf{R}^d$- 值半鞅序列的极限定理，它们的证明可以在[16]和[48]中找到.

记 $C_0^+(\mathbf{H}) = \{g \geqslant 0 : g$ 是定义在 $\mathbf{H}$ 上的有界连续函数，并且存在常数 $a,b(0<a<b)$ 使得 $g(x)=0$, $\|x\| \leqslant a$, $\|x\| \geqslant b\}$.

设 X^n 和 X 分别为 $(\Omega^n, \mathscr{F}^n, \mathscr{F}_t^n, P^n)$ 和 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathscr{F}_t, P)$ 上的半鞅，并且 $(\mathscr{F}_t^n)_{t\geqslant 0}$ 和 $(\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$ 都满足"通常条件"，h 为具有引理 3.4.9 中性质的截尾函数，在 h 下，X^n 和 X 的可料特征分别为 (B^n, C^n, ν^n) 和 (B, C, ν)，第二修正特征分别为 $\widetilde{C}^n$ 和 $\widetilde{C}$. 如果 X^n 是局部平方可积的半鞅，即

$$|x|^2 . \nu_t^n < \infty, \quad \forall t \geqslant 0, \tag{1.1}$$

则我们可以定义 X^n 不要截尾函数的第一特征，记为 B'^n，它是有限变差的可料过程，并且满足 $B'^n_0 = 0, X^n - B'^n$ 是局部鞅. 由性质 1.4.10，我们有

$$B'^n = B^n + (x - h(x)) . \nu^n. \tag{1.2}$$

类似地，我们可以得到

$$\widetilde{C'}_t = C_t^n + x^{\otimes 2} . \nu_t^n - \sum_{s \leqslant t} (\Delta B'^n_s)^{\otimes 2}. \tag{1.3}$$

在定理 4.1.1 和 4.1.2 中，我们都假设 X^n 和 X 都是独立增量过程，并且 X 没有固定不连续点，则 $B, \widetilde{C}$ 和 $g . \nu$ 都是连续的，其中 $g \in C_0^+(\boldsymbol{H})$.

4.1.1 定理 设 X^n 和 X 都是 $\boldsymbol{R}^d$-值半鞅，ν^n 和 ν 满足条件 (1.1)，并且

$$\lim_{a \uparrow \infty} \limsup_{n \to \infty} |x|^2 I_{\{|x| > a\}} . \nu_t^n = 0, \quad \forall t \geqslant 0, \tag{1.4}$$

B' 和 B'^n 的定义同 (1.2)，$\widetilde{C'}$ 和 $\widetilde{C'}^n$ 的定义同 (1.3)，则 $X^n \xrightarrow{\mathscr{L}} X$ 的充要条件是：

(Ⅰ) $\sup_{s \leqslant t} |B'^n_s - B'_s| \to 0, \quad \forall t \geqslant 0$;

(Ⅱ) $\widetilde{C'}^n_t \to \widetilde{C'}_t, \quad \forall t \geqslant 0$;

(Ⅲ) $g . \nu_t^n \to g . \nu_t, \quad \forall t \geqslant 0, \quad g \in C_0^+(\boldsymbol{R}^d)$.

进一步地，在这种情况下，我们还有：

$\sup_{s \leqslant t} |g . \nu_s^n - g . \nu_s| \to 0, \quad \forall t \geqslant 0, \quad g \in C_0^+(\boldsymbol{R}^d)$;

$\sup_{s \leqslant t} |\widetilde{C'}^n_s - \widetilde{C'}_s| \to 0, \quad \forall t \geqslant 0.$

4.1.2 定理 假设 X^n 和 X 是特殊半鞅，则下列叙述等价：

a) $X^n \xrightarrow{\mathscr{L}} X$;

b) (Ⅰ) $\sup_{s \leqslant t} |B_s^n - B_s| \to 0, \quad \forall t \geqslant 0,$

(Ⅱ) $\widetilde{C}_t^n \to \widetilde{C}_t$, $\quad \forall\, t \geqslant 0$,

(Ⅲ) $g.\nu^n \to g.\nu$ 按 $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{R})$ 上的 Skorokhod 拓扑成立.

4.1.3 定理 设 X 为 $\boldsymbol{R}^d$- 值连续的 Gauss 鞅,可料特征为 $(0,C,0)$,X^n 为 $\boldsymbol{R}^d$ 值局部鞅,并且满足 $|\Delta X^n| \leqslant k, n \geqslant 1$,其中 k 为常数,则下列叙述等价:

(Ⅰ) $X^n \xrightarrow{\mathscr{L}} X$;

(Ⅱ) $[X^{n,i}, X^{n,j}]_t \xrightarrow{P} C_t^{ij}$, $\qquad \forall\, t \geqslant 0,\ i,j \leqslant d$;

(Ⅲ) $\langle X^{n,i}, X^{n,j}\rangle_t \xrightarrow{P} C_t^{ij}, \forall\, t \geqslant 0, i,j \leqslant d$,并且

$$\nu^n([0,t] \times \{|x| > \varepsilon\}) \xrightarrow{P} 0, \forall\, t > 0, \varepsilon > 0. \quad (1.5)$$

4.1.4 定理 假设 X 为 $\boldsymbol{R}^d$- 值连续的 Gauss 鞅,可料特征为$(0,C,0)$.X^n 为 $\boldsymbol{R}^d$ 值局部鞅,如果

$$\lim_{a \uparrow \infty}\limsup_{n \to \infty} P^n(|x| I_{\{|x| \geqslant a\}} . \nu_t^n > \eta) = 0, \forall\, \eta > 0, t > 0, \quad (1.6)$$

则下列叙述等价:

(Ⅰ) $X^n \xrightarrow{\mathscr{L}} X$;

(Ⅱ) $[X^{n,i}, X^{n,j}]_t \xrightarrow{P} C_t^{ij}$, $\quad \forall\, t \geqslant 0, i,j \leqslant d$;

(Ⅲ) $[M^{n,i}, M^{n,j}]_t \xrightarrow{P} C_t^{ij}, \forall\, t \geqslant 0, i,j \leqslant d$,并且(1.5) 成立;

(Ⅳ) $\widetilde{C}_t^n \xrightarrow{P} \widetilde{C}_t, \forall\, t \geqslant 0$,并且(1.5) 成立.

其中 $M^n = X^n(h) - B^n - X_0^n$ 是局部平方可积鞅.

4.1.5 定理 设 X^n 和 X 都是 $\boldsymbol{R}^d$- 值半鞅,X 是没有固定不连续点的独立增量半鞅,并且 ν^n 和 ν 均满足(1.1),B'^n 和 B' 由(1.2) 定义,$\widetilde{C}'^n$ 和$\widetilde{C}'$ 由(1.3) 定义,如果

(Ⅰ) $\sup_{s \leqslant t} |B'^n_s - B'_s| \xrightarrow{P} 0$, $\quad \forall\, t > 0$,

(Ⅱ) $\widetilde{C}'^n_t \xrightarrow{P} \widetilde{C}'_t$, $\quad \forall\, t > 0$,

(Ⅱ) $g.\upsilon_t^n \xrightarrow{P} g.\upsilon_t, \quad \forall\, t>0,\ g\in C_0^+(\boldsymbol{R}^d)$,

并且

$$\lim_{a\uparrow\infty}\limsup_{n\to\infty} P^n(|x|^2 I_{\{|x|>a\}}.\upsilon_t^n > \eta) = 0, \quad \forall\, \eta>0, t>0, \tag{1.7}$$

则 $X^n \xrightarrow{\mathscr{L}} X$.

对于任意的 $a>0$,在 $\Omega = \boldsymbol{D}(\boldsymbol{R}^d)$ 和 Ω^n 上定义:

$$\begin{cases} S_a(\alpha) = \inf\{t: |\alpha(t)| \geqslant a \text{ 或 } |\alpha(t-)| \geqslant a\}, \\ S_a^n = S_a \circ X^n = \inf\{t: |X_t^n| \geqslant a \text{ 或 } |X_{t-}^n| \geqslant a\}. \end{cases} \tag{1.8}$$

4.1.6 令 D 是 $\boldsymbol{R}_+$ 的一个稠密子集,假设:

(Ⅰ) 局部强控制假设:对任意 $a>0$,存在一个连续增函数 $F_a(\cdot)$,使得停止过程 $\sum_{i\leqslant d}\mathrm{Var}(B^i)^{S_a}$ 和 $\left[\sum_{i\leqslant d}C^{ii} + (|x|^2 \wedge 1).\upsilon\right]^{S_a}$ 被 F_a 强控制;

(Ⅱ) 鞅问题 $\mathscr{S}(\sigma(X_0), X|\eta; B, C, \upsilon)$ 有局部唯一解,记为 P;

(Ⅲ) 对任意 $a>0, t>0$,

$$\lim_{b\uparrow\infty}\sup_{\alpha\in\Omega}\upsilon\Big(\alpha; [0, t\wedge S_a(\alpha)]\times\{x: |x|>b\}\Big) = 0;$$

(Ⅳ) 对任意 $t\in D, g\in C_0^+(\boldsymbol{R}^d)$,$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{R}^d)$ 上的函数 $\alpha\to B_t(\alpha)$,$\widetilde{C}_t(\alpha)$,$g.\upsilon_t(\alpha)$ 都是连续的;

(Ⅴ) $\eta^n \xrightarrow{w} \eta$;

(Ⅵ) 下列三个条件成立:

a) $\sup_{s\leqslant t}|B_{s\wedge S_a^n}^n - (B_{s\wedge S_a})\circ X^n| \xrightarrow{P} 0, \forall\, t>0, a>0$,

b) $\widetilde{C}_{t\wedge S_a^n}^n - (\widetilde{C}_{t\wedge S_a})\circ X^n \xrightarrow{P} 0, \forall\, t\in D, a>0$,

c) $g.\upsilon_{t\wedge S_a^n}^n - (g.\upsilon_{t\wedge S_a})\circ X^n \xrightarrow{P} 0, \forall\, t\in D, a>0$,
$g\in C_0^+(\boldsymbol{R}^d)$,

则 $\mathscr{L}(X^n) \xrightarrow{w} P$.

对于任意的 $a,b(0<b<a)$，在 $\Omega=\overline{\boldsymbol{D}}(\boldsymbol{R})$ 和 Ω^n 上定义：S_a 和 S_a^n 同(1.8). 令

$$\begin{cases} T_b(\alpha)=\inf\{t:|\alpha(t)|\leqslant b \text{ 或 } |\alpha(t-)|\leqslant b\} \\ T_b^n=T_b\circ X^n=\inf\{t:|X_t^n|\leqslant b \text{ 或 } |X_{t-}^n|\leqslant b\}. \end{cases}$$

为了书写方便，记 $\tau_{a,b}=S_a\wedge T_b$，$\tau_{a,b}^n=S_a^n\wedge T_b^n$.

设 X 为 $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{R})$ 上的坐标过程，即 $X_t(\alpha)=\alpha(t)$，P 为 $(\boldsymbol{D}(\boldsymbol{R}),\mathscr{D}(\boldsymbol{R}))$ 上的概率测度，取 $\mathscr{F}_t$ 和 $\mathscr{F}$ 分别为 $\mathscr{D}_t(\boldsymbol{R})$ 和 $\mathscr{D}(\boldsymbol{R})$ 关于 P 的完备化，并设在 P 之下，X 关于 $(\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$ 为半鞅.

4.1.7 定理 设 $(\Omega,\mathscr{F},\mathscr{F}_t)$ 为上述所定义的带流可测空间. 令 $(\Omega',\mathscr{F}',\mathscr{F}'_t)=\left(\Omega\cap\overline{\boldsymbol{D}}(\boldsymbol{R}),\mathscr{F}\cap\overline{\boldsymbol{D}}(\boldsymbol{R}),\mathscr{F}_t\cap\overline{\boldsymbol{D}}(\boldsymbol{R})\right)$，$X$ 为定义在 $\overline{\boldsymbol{D}}(\boldsymbol{R})$ 上的坐标过程，并且在 P 之下，X 为半鞅，(B,C,ν) 为 X 关于截尾函数 h 的可料特征，X^n 为取值于 $\overline{\boldsymbol{D}}(\boldsymbol{R})$ 的半鞅，关于 h 的可料特征为 (B^n,C^n,ν^n). 又设 D 为 $\boldsymbol{R}_+$ 的稠密子集. 如果下列条件成立，则 $X^n \xrightarrow{\mathscr{L}} X$.

(Ⅰ) 局部强控制条件：对任意 $a>b>0$，存在单调增加的连续函数 $F_{a,b}(\cdot)$，使得 $\mathrm{Var}(B)^{\tau_{a,b}}$，$(C+(x^2\wedge 1).\nu)^{\tau_{a,b}}$ 被 $F_{a,b}(\cdot)$ 强控制；

(Ⅱ) 对任意 $a>b>0$，$t>0$，

$$\limsup_{c\uparrow\infty\,\alpha\in\Omega}\nu(\alpha,[0,t\wedge\tau_{a,b}(\alpha)]\times\{x:x>c\})=0;$$

(Ⅲ) 鞅问题 $\mathscr{S}(\sigma(X_0),X|X_0;B,C,\nu)$ 有局部唯一解，记此唯一解为 P；

(Ⅳ) 对任意的 $t\in D$，$g\in C_0^+(\boldsymbol{R})$，映射 $\alpha\to B_t(\alpha)$，$\widetilde{C}_t(\alpha)$，$g.\nu_t(\alpha)$ 在 $\overline{\boldsymbol{D}}(\boldsymbol{R})$ 上连续；

(Ⅴ) $X_0^n \xrightarrow{\mathscr{L}} X_0$；

(Ⅵ) a) $\sup_{s\leq t}|B^n_{s\wedge\tau^n_{a,b}}-(B_{s\wedge\tau_{a,b}})\circ X^n|\xrightarrow{P}0,\forall a>b>0,$
$t>0,$

b) $\widetilde{C}^n_{t\wedge\tau^n_{a,b}}-(\widetilde{C}_{t\wedge\tau_{a,b}})\circ X^n\xrightarrow{P}0,\forall a>b>0,t\in D,$

c) $g.\nu^n_{t\wedge\tau^n_{a,b}}-(g.\nu_{t\wedge\tau_{a,b}})\circ X^n\xrightarrow{P}0,\quad \forall a>b>0,$
$t\in D,g\in C_0^+(\boldsymbol{R}).$

4.2 无限维空间值半鞅序列的极限定理

本节我们将研究无限维空间值半鞅序列的极限定理，主要讨论 $\boldsymbol{H}$- 值独立增量半鞅序列的极限定理以及 $\boldsymbol{H}$- 值半鞅序列到 $\boldsymbol{H}$- 值独立增量半鞅的极限定理.

设 $\boldsymbol{H}$ 为可分的 Hilbert 空间，$\{e_n\}_{n\geq 1}$ 为 $\boldsymbol{H}$ 的一个基，映射 Π_m，V_m，$\Pi_{m\times m}$ 和 $V_{m\times m}$ 的定义和第二章相同.

4.2.1 定理 设 μ_n 和 μ 是 $\boldsymbol{H}$ 上的概率测度. μ_n 弱收敛于 μ 的充要条件是：

(Ⅰ) 对任意 $m\in N$，$\mu_n\Pi_m^{-1}$ 弱收敛于 $\mu\Pi_m^{-1}$；

(Ⅱ) $\lim_{m\to\infty}\limsup_{n\to\infty}\mu_n(\{\|x-V_m\Pi_m x\|\geq\varepsilon\})=0,\forall\varepsilon>0.$

证明 见[2]的第六章定理 1 的证明.

4.2.2 定理 设 X^n 和 X 都是 $\boldsymbol{H}$- 值独立增量的局部平方可积半鞅($X_0^n=X_0=0$)，它们的典则分解分别为 $X^n=N^n+A^n$ 和 $X=N+A$，并且 X 没有固定不连续点. 假设

$$\lim_{a\to\infty}\limsup_{n\to\infty}\|x\|^2 I_{\{\|x\|>a\}}.\nu_t^n=0,\quad\forall t>0,\tag{2.1}$$

[FC] 对任意的 $N\in\boldsymbol{N}$，存在 $m,n_0\in\boldsymbol{N}$ 使得当 $n\geq n_0$ 时，$\boldsymbol{H}\backslash(\boldsymbol{V}_m\boldsymbol{R}^m)$- 值过程 $X_n-V_m\Pi_m X^n$ 和 $X-V_m\Pi_m X$ 在[0,N]上连续.

如果下列条件成立，则 $X^n\xrightarrow{\mathscr{L}}X.$

(Ⅰ) 按 $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{H})$ 上的 Skorokhod 拓扑 $A^n \to A$；

(Ⅱ) 按 $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{H}\hat{\otimes}_1\boldsymbol{H})$ 上的 Skorokhod 拓扑《N^n》$\to$《N》；

(Ⅲ) $g.\nu_t^n \to g.\nu_t$， $\forall t>0$，$g\in C_0^+(\boldsymbol{H})$.

证明 因为 X^n 和 X 都是独立增量的半鞅，所以由定理 1.4.18 知《N^n》、A^n、《N》和 A 均为非随机. X 没有固定不连续点可推知 A 和《N》都是连续的. 从而条件(Ⅰ)和(Ⅱ)表明 $\{A^n\}_{n\geqslant 1}$ 和 $\{$《N^n》$\}_{n\geqslant 1}$ 都是连续胎紧. 对任意 $g\in C_0^+(\boldsymbol{H})$，由于 $g.\nu$ 是 $\boldsymbol{R}_+$ 上的连续增函数，由(Ⅲ)可推知在 $\boldsymbol{R}_+$ 的任意紧子集上，$g.\nu^n$ 一致收敛到 $g.\nu$. 因此 $\{X^n\}_{n\geqslant 1}$ 满足条件 3.4.7(Ⅳ). 由于 $X_0^n=0$，3.4.7(Ⅰ)成立是显然的. 对任意的 $N>0$ 和 $\varepsilon>0$，存在 $a\in\boldsymbol{Q}_+$（非负有理数集的全体）使得：

$$g_a.\nu_N\leqslant \nu\left([0,N]\times\left\{\|x\|\geqslant\frac{1}{a}\right\}\right)\leqslant\frac{\varepsilon}{2}.$$

因为 $g_a.\nu_N^n\to g_a.\nu_N$，所以当 n 充分大时，我们有

$$\nu^n\left([0,N]\times\left\{\|x\|\geqslant\frac{2}{a}\right\}\right)\leqslant g_a.\nu_N^n\leqslant\varepsilon,$$

即 3.4.7(Ⅱ)成立. 对任意的 $g\in C_0^+(\boldsymbol{H})$，存在 $a>0$ 和 $b>0$ 使得 $g(x)=0$，$\|x\|<a$ 和 $g\leqslant b$，从而

$$\begin{aligned}&[g\circ(I-V_m\Pi_m)].\nu_N\\ &\leqslant b\nu([0,N]\times\{x-V_m\Pi_m x:\|x-V_m\Pi_m x\|\geqslant a\}).\end{aligned}$$

由条件[FC]我们有 $\lim\limits_{m\to\infty}\nu([0,N]\times\{x-V_m\Pi_m x:\|x-V_m\Pi_m x\|\geqslant a\})=0$. 因此条件(Ⅲ)表明

$$\lim_{m\to\infty}\limsup_{n\to\infty} g\circ(I-V_m\Pi_m).\nu_N^n=\lim_{m\to\infty} g\circ(I-V_m\Pi_m).\nu_N=0.$$

故 $\{X^n\}_{n\geqslant 1}$ 满足条件 3.4.7(Ⅲ). 由定理 3.4.7 我们知道 $\{X^n\}_{n\geqslant 1}$ 是胎紧的.

由于 X^n 和 X 都是局部平方可积的半鞅，在条件[FC]、(2.1)和(Ⅰ)～(Ⅲ)下，利用性质 1.4.13 知：对任意 $T>0$ 存在 $m_0\in\boldsymbol{N}$，使得

(a) 当 $m \geqslant m_0$ 时，关于 $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{R}^m)$ 上的 Skorokhod 拓扑，$\Pi_m A^n \to \Pi_m A$ 在$[0,T]$上成立，

(b) 当 $m \geqslant m_0$ 时，关于 $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{R}^{m\times m})$ 上的 Skorokhod 拓扑，$\Pi_{m\times m}A^n \to \Pi_{m\times m}A$ 在$[0,T]$上成立，

(c) 对任意 $t>0$ 和 $g \in C_0^+(\boldsymbol{R}^m)$，当 $m \geqslant m_0$ 时，$g.\upsilon_t^n \to g.\upsilon_t$ 和 $|x|^2.\upsilon_t^n < \infty$，$|x|^2.\upsilon_t < \infty$. 故由定理 4.1.1 可得知：当 $m \geqslant m_0$ 时，$\Pi_m X^n \xrightarrow{\mathscr{L}} \Pi_m X$ 在$[0,T]$上成立. 又由 $\{X^n\}_{n\geqslant 1}$ 的胎紧性知

$$\lim_{m\to\infty}\limsup_{n\to\infty} P^n\left(\sup_{s\leqslant T}\| X_s^n - V_m\Pi_m X_s^n \| > \varepsilon\right) = 0, \quad \forall\, \varepsilon > 0.$$

利用定理 4.2.1 知在$[0,T]$上 $X^n \xrightarrow{\mathscr{L}} X$，因此 X 是 $\{X^n\}_{n\geqslant 1}$ 唯一可能的极限点，故 $X^n \xrightarrow{\mathscr{L}} X$. 定理证毕.

4.2.3 引理 假设 X^n、X 和定理 4.2.2 相同，如果 $X^n \xrightarrow{\mathscr{L}} X$，则对 $\boldsymbol{H}$ 上任一有界连续、在 0 的邻域内为 0，并且在无穷远点的极限存在的函数 g，我们有 $g.\upsilon^n \to g.\upsilon$ 按 $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{R})$ 上的 Skorokhod 拓扑成立.

证明 同[16]中引理 Ⅵ-3.20 证法相同，故略去.

4.2.4 引理 假设 X^n、X 和定理 4.2.2 相同，又假设 $X^n \xrightarrow{\mathscr{L}} X$，并且对任意 $t>0$，序列 $\left\{\sup_{s\leqslant t}\| X_s^n \|\right\}_{n\geqslant 1}$ 一致可积. 如果我们记 $\beta_n(t) = E^n X_t^n$、$\beta(t) = EX_t$，则按 $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{H})$ 上的 Skorokhod 拓扑 $\beta_n \to \beta$.

证明 因为 $X^n \xrightarrow{\mathscr{L}} X$，所以对任意的 $t \notin J(X)$（X 的不连续点集），$X_t^n \xrightarrow{\mathscr{L}} X_t$. 按照 $\left\{\sup_{s\leqslant t}\| X_s^n \|\right\}_{n\geqslant 1}$ 一致可积性的假设，我们有 $\beta_n(t) \to \beta(t)$，$\forall\, t \notin J(X)$，因此由右连左极性我们知道 β 是 $\{\beta_n\}_{n\geqslant 1}$ 的唯一可能的极限点. 下面我们只要证明 $\{\beta_n\}_{n\geqslant 1}$ 按照 $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{H})$ 上的 Skorokhod 拓扑是相对紧的.

因为$\sup_n \sup_{s\leqslant t} \| \beta_n(s) \| \leqslant \sup_n E^n\left(\sup_{s\leqslant t} \| X_s^n \| \right) < \infty$，所以我们只要证明条件 2.2.4(Ⅰ)、(Ⅱ)成立.

设 $N > 0$ 和 $\varepsilon > 0$ 固定，令 $Z^n = \sup_{s\leqslant N} \| X_s^n \|$，由$\{Z^n\}_{n\geqslant 1}$的一致可积性我们知道存在 $\theta > 0$，使得

$$E^n Z^n I_{\{Z^n > \theta\}} < \varepsilon, \quad \forall\, n \geqslant 1. \tag{2.2}$$

因为$\{X^n\}_{n\geqslant 1}$胎紧，所以由定理 3.2.3 知，存在 $\delta_0 > 0$，m、$n_0 \in \mathbf{N}$，使得

$$n \geqslant n_0 \Rightarrow \begin{cases} P^n(F^n) \leqslant \dfrac{\varepsilon}{\theta} \\ P^n(G^n) \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2\theta}, \end{cases} \tag{2.3}$$

其中 $F^n = \{w'_N(X^n, \delta_0) \geqslant \varepsilon\}$，$G^n = \left\{ \sup_{s\leqslant N} \| X_s^n - V_m \Pi_m X_s^n \| \geqslant \varepsilon \right\}$.

设 g 是 $\boldsymbol{H}$ 上的有界连续函数，并且满足 $0 \leqslant g \leqslant 1$；$g(x) = 1$，$\| x \| \geqslant \varepsilon$. 令 $\alpha_n = g.v^n$ 和 $\alpha = g.v$，引理 4.2.3 表明按 Skorokhod 拓扑 $\alpha_n \to \alpha$，因此存在 $\delta \in (0, \frac{\delta_0}{2})$ 使 $w'_N(\alpha_n, \delta) < \frac{\varepsilon}{\theta}$，$\forall\, n \geqslant 1$. 引理 2.1.4 表明：对任意 $n \geqslant 1$，在$[0, N]$上存在一个分割 $0 < t_0^n < t_1^n < \cdots < t_{p_n}^n = N$，使得 $t_{j+1}^n - t_j^n \geqslant \delta$ $(j < p_n - 1)$，$t_{j+1}^n - t_j^n \leqslant 2\delta < \delta_0 (j \leqslant p_n - 1)$，并且 $\alpha_n(t_{j+1}^n) - \alpha_n(t_j^n) \leqslant \frac{2\varepsilon}{\theta}$ $(j \leqslant p_n - 1)$.

如果我们令 $H_j^n = \left\{ \sup_{t_j^n < s < t_{j+1}^n} \| \Delta X_s^n \| > \varepsilon \right\}$，则

$$P^n(H_j^n) \leqslant E\left(\sum_{t_j^n < s < t_{j+1}^n} g(\Delta X_s^n) \right)$$

$$\leqslant \alpha_n(t_{j+1}^n -) - \alpha_n(t_j^n) \leqslant \frac{2\varepsilon}{\theta}. \tag{2.4}$$

任取 $t_j^n \leqslant s < t < t_{j+1}^n$，由 t_j^n 的取法知：当 $\omega \notin F^n \cap H_j^n$ 时，容易推得

$$\| X_t^n(\omega) - X_s^n(\omega) \|$$

$$\leqslant \| X_t^n(\omega) - X_{t_{j+1}^n}^n(\omega) \| + \| X_s^n(\omega) - X_{t_j^n}^n(\omega) \|$$
$$+ \| X_{t_{j+1}^n}^n(\omega) - X_{t_j^n}^n(\omega) \|$$
$$\leqslant 3\varepsilon,$$

因此

$$\| X_t^n - X_s^n \| \leqslant 3\varepsilon + 2Z^n I_{F^n \cup H_j^n}$$
$$\leqslant 3\varepsilon + 2\theta I_{F^n \cup H_j^n} + 2Z^n I_{\{Z^n > \theta\}}.$$

对 $n \geqslant n_0$ 和 $t_j^n \leqslant s < t < t_{j+1}^n$，由(2.2) ~ (2.4) 我们有

$$\| \beta_n(t) - \beta_n(s) \| \leqslant 3\varepsilon + 2\theta\left(\frac{\varepsilon}{\theta} + \frac{2\varepsilon}{\theta}\right) + 2\varepsilon = 11\varepsilon,$$

因此 $w(\beta_n, [t_j^n, t_{j+1}^n]) \leqslant 11\varepsilon$ $(n \geqslant n_0)$，由此即得 $w'_N(\beta_n, \delta) \leqslant 11\varepsilon$ $(n \geqslant n_0)$. 这表明对$\{\beta_n\}_{n\geqslant 1}$ 条件 2.2.4(Ⅱ) 成立.

又因为

$$\sup_{s\leqslant N} \| X_s^n - V_m \Pi_m X_s^n \|$$
$$\leqslant \varepsilon + 2Z^n I_{G^n} \leqslant \varepsilon + 2\theta I_{G^n} + 2Z^n I_{\{Z^n > \theta\}},$$

再由(2.2) 和(2.3) 我们有

$$\sup_{\substack{s\leqslant N \\ n\geqslant n_0}} \| \beta_n(s) - V_m \Pi_m \beta_n(s) \|$$
$$\leqslant \sup_{n\geqslant n_0} E \sup_{s\leqslant N} \| X_s^n - V_m \Pi_m X_s^n \| \leqslant 4\varepsilon,$$

即$\{\beta_n\}_{n\geqslant 1}$ 满足条件 2.2.4(Ⅲ). 故由定理 2.2.8(b) 知$\{\beta_n\}_{n\geqslant 1}$ 在 $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{H})$ 中相对紧. 引理证毕.

4.2.5 引理 设 M 为 0 初值的实值局部平方可积鞅，则存在常数 K_1 和 K_2 满足

$$E\left(\sup_{s\leqslant t} M_s^4\right) \leqslant K_1 a^2 (E\langle M, M\rangle_t^2)^{\frac{1}{2}} + K_2 E(\langle M, M\rangle_t^2), \qquad (2.5)$$

其中 $a = \sup_{t,\omega} |\Delta M_t(\omega)|$.

证明 我们只需就 $a < \infty$ 的情形证之. 令 $T_n = \inf\{t \geqslant 0: |M_t| \geqslant n$ 或$\langle M, M\rangle_t \geqslant n\}$，则两个停止过程 M^{T_n} 和$\langle M, M\rangle^{T_n}$ 均为有界，其界分别为 $n + a$ 和 $n + a^2$. 假设对 $\forall\, n \geqslant 1$，(2.5) 对于 M^{T_n}

成立，在这种情况下，(2.5) 式左右两端都是 n 的单调增函数，因此，我们只要令 $n\uparrow\infty$，即可得到(2.5) 对 M 成立. 故我们只要对 M 和 $\langle M,M\rangle$ 均为有界证之.

固定 $t>0$，令 $y=E\left(\sup_{s\leqslant t}M_s^4\right)$，$z=E(\langle M,M\rangle_t^2)$. 注意到 $N=[M,M]-\langle M,M\rangle$ 是有限变差鞅，并且满足 $|\Delta N|\leqslant 2a^2$. 因此 $[N,N]=\sum_{s\leqslant\cdot}(\Delta N_s)^2$ 被 $2a^2\mathrm{Var}(N)$ 强控制，而 $2a^2\mathrm{Var}(N)$ 又被 $2a^2([M,M]+\langle M,M\rangle)$ 强控制，所以 $\langle N,N\rangle$ 存在，并且 $\langle N,N\rangle\leqslant 4a^2\langle M,M\rangle$ 和

$$\begin{aligned}E([M,M]_t^2)&\leqslant 2E(N_t^2)+2E(\langle M,M\rangle_t^2)\\&=2E(\langle N,N\rangle_t)+2z\\&\leqslant 8a^2E(\langle M,M\rangle_t)+2z\leqslant 8a^2\sqrt{z}+2z.\end{aligned}\tag{2.6}$$

另一方面，由 Itô 公式，我们有 $M^2=2M_-.M+[M,M]$，因此

$$y\leqslant 8E\left(\sup_{s\leqslant t}|M_-.M_s|^2\right)+2E([M,M]_t^2).\tag{2.7}$$

注意到局部鞅 $Z=M_-.M$ 满足 $\langle Z,Z\rangle=M_-^2.\langle M,M\rangle$ 是有界的，因此 N 是平方可积鞅. 利用 Doob 不等式及 Schwarz 不等式得

$$\begin{aligned}&E\left(\sup_{s\leqslant t}|M_-.M_s|^2\right)\\&\leqslant 4E(Z_t^2)=4E(\langle Z,Z\rangle)\\&\leqslant 4E\left[\left(\sup_{s\leqslant t}M_{s-}^2\right)\langle M,M\rangle_t\right]\leqslant 4\sqrt{yz}.\end{aligned}\tag{2.8}$$

(2.6)、(2.7) 和(2.8) 表明

$$y\leqslant 32\sqrt{yz}+16a^2\sqrt{z}+4z.$$

因为 $y<\infty$，所以只有 $y\leqslant[16z+2(65z+4a^2\sqrt{z})^{\frac{1}{2}}]^2$. 取 $K_1=32$，$K_2=1062$，即得 $y\leqslant K_1a^2\sqrt{z}+K_2z$. 引理证毕.

4.2.6 定理 假设 X^n、X 和定理 4.2.2 中的相同，如果 $X^n \xrightarrow{\mathscr{L}} X$，$\|\Delta X^n\| \leqslant a$，$\forall n \geqslant 1$，并且$\sup\limits_n \mathrm{Var}(\langle\!\langle N^n \rangle\!\rangle)_t < \infty$，$\forall t > 0$，则条件 4.2.2(Ⅰ)，(Ⅱ)和(Ⅲ)成立.

证明 因为$X^n \xrightarrow{\mathscr{L}} X$，所以由引理4.2.3知4.2.2(Ⅲ)成立. 注意到$\sup\limits_n \mathrm{Var}(\langle\!\langle N^n \rangle\!\rangle)_t < \infty$，$\forall t > 0$，并利用(2.5)，我们有

$$\sup_n E\left(\sup_{s\leqslant t} \| N_s^n \|^4\right)$$
$$\leqslant \sup_n \left\{K_1 a^2 [E(\langle N^n \rangle_t^2)]^{\frac{1}{2}} + K_2 E(\langle N^n \rangle_t^2)\right\} < \infty.$$

因此当 $p < 4$ 时，序列$\left\{\sup\limits_{s\leqslant t} \| N_s^n \|^p\right\}_{n\geqslant 1}$ 是一致可积的，所以

$$\lim_{\theta\uparrow\infty} \sup_n P^n\left(\sup_{s\leqslant t} \| N_s^n \| > \theta\right) = 0, \qquad \forall t > 0. \tag{2.9}$$

$X^n \xrightarrow{\mathscr{L}} X$ 表明对 X^n，(2.9) 仍然成立. 由 $A^n = EX^n$ 我们知对于 A^n，(2.9) 也成立，但 $\sup\limits_{s\leqslant t} \| A_s^n \|$ 非随机，所以对于 $\left\{\sup\limits_{s\leqslant t} \| A_s^n \|\right\}_{n\geqslant 1}$，(2.9) 意为：$\sup\limits_n \left[\sup\limits_{s\leqslant t} \| A_s^n \|\right] < \infty$. 由 $\sup\limits_{s\leqslant t} \| X_s^n \| \leqslant \sup\limits_{s\leqslant t} \| N_s^n \| + \sup\limits_{s\leqslant t} \| A_s^n \|$ 及$\left\{\sup\limits_{s\leqslant t} |N_s^n|^p\right\}_{n\geqslant 1}$ $(p < 4)$ 一致可积可知$\left\{\sup\limits_{s\leqslant t} \| X_s^n \|\right\}_{n\geqslant 1}$ $(\forall t > 0)$ 一致可积. 因为 $X^n \xrightarrow{\mathscr{L}} X$、$X^n$ 和 X 是 H- 值独立增量半鞅，所以由引理 4.2.4 按 $D(H)$ 上的 Skorokhod 拓扑 $A^n \to A$，即$\{X^n\}_{n\geqslant 1}$ 满足 4.2.2(Ⅰ).

最后，因为 X 没有固定不连续点，所以 A 连续. 由 $X^n \xrightarrow{\mathscr{L}} X$ 及 $A^n \xrightarrow{s.k} A$ 可知 $N^n \xrightarrow{\mathscr{L}} N$，由此可推得$\left(N^n\right)^{\otimes_2} \xrightarrow{\mathscr{L}} N^{\otimes_2}$. 再利用$\left\{\sup\limits_{s\leqslant t} \| N_s^n \|^p\right\}_{n\geqslant 1}$ $(p < 4)$ 一致可积和引理 4.2.4，按 $D(H \hat{\otimes}_1 H)$ 上的 Skorokhod 拓扑$\langle\!\langle N^n \rangle\!\rangle \to \langle\!\langle N \rangle\!\rangle$，即$\{X^n\}_{n\geqslant 1}$ 满足 4.2.2(Ⅱ). 定理证毕.

4.2.7 定理 设 X^n 和 X 是 $\boldsymbol{H}$-值局部平方可积半鞅，并且 X 是没有固定不连续点的独立增量过程，$\{X^n\}_{n\geqslant 1}$ 满足条件

$$\lim_{a\to\infty}\limsup_{n\to\infty} P^n(\|x\|^2 I_{\{\|x\|>a\}}.\upsilon_t^n > \eta) = 0, \forall\, t \geqslant 0, \eta > 0. \tag{2.10}$$

如果下列条件成立：

(Ⅰ) $\sup\limits_{s\leqslant N}\|A_s^n - A_s\| \xrightarrow{P} 0, \quad \forall\, N > 0,$

(Ⅱ) $\sup\limits_{s\leqslant N}\|\langle\langle N^n\rangle\rangle_s - \langle\langle N^n\rangle\rangle_s\|_1 \xrightarrow{P} 0, \quad \forall\, N > 0,$

(Ⅲ) $g.\upsilon_t^n \xrightarrow{P} g.\upsilon_t, \quad \forall\, t > 0, g \in C_0^+(\boldsymbol{H}),$

则 $X^n \xrightarrow{\mathscr{L}} X.$

证明　因为 X 为没有固定不连续点的独立增量半鞅，所以 A 及 $\langle\langle N\rangle\rangle$ 均为连续，由条件（Ⅰ）和（Ⅱ）可以推得 $\{A^n\}_{n\geqslant 1}$ 和 $\{\langle\langle N^n\rangle\rangle\}_{n\geqslant 1}$ 均为连续胎紧. 对 $\forall\, g \in C_0^+(\boldsymbol{H})$，由假设知 $g.\upsilon$ 为 $\boldsymbol{R}_+$ 上单调增函数，条件（Ⅲ）表明 $g.\upsilon^n \xrightarrow{\mathscr{L}} g.\upsilon$，因此 $\{g.\upsilon^n\}_{n\geqslant 1}$ 也是连续胎紧，即 $\{X^n\}_{n\geqslant 1}$ 满足 3.4.7(Ⅳ). 由 $X_0^n = 0$ 知 3.4.7(Ⅰ) 成立是显然的. 对 $\forall\, N > 0, \varepsilon > 0$，存在 $a \in \boldsymbol{Q}_+$ 使得

$$g_a.\upsilon_N \leqslant \upsilon\left([0,N] \times \left\{\|x\| > \frac{1}{a}\right\}\right) \leqslant \varepsilon.$$

由条件（Ⅲ）我们有

$$P^n\left(\upsilon^n\left([0,N] \times \left\{\|x\| > \frac{2}{a}\right\}\right) > 2\varepsilon\right)$$

$$\leqslant P^n(\|g_a.\upsilon_N^n - g_a.\upsilon_N\| > \varepsilon) \to 0,$$

即 $\{X^n\}_{n\geqslant 1}$ 满足 3.4.7(Ⅱ).

对 $\forall\, g \in C_0^+(\boldsymbol{H})$，存在 $a > 0, b > 0$ 使得 $g(x) = 0$，$\|x\| \leqslant a$ 及 $g \leqslant b$，从而可推得

$$g \circ (I - V_m\Pi_m).\upsilon_N$$

$$\leqslant b\upsilon([0,N] \times \{x - V_m\Pi_m x : \|x - V_m\Pi_m x\| \geqslant a\}) \to 0,$$

$m \to \infty$. 因此

$$
\begin{aligned}
& P^n\left(g \circ (I - V_m\Pi_m) . \upsilon_N^n \geqslant 2\epsilon \right) \\
\leqslant\ & P^n\left(|g \circ (I - V_m\Pi_m) . \upsilon_N^n - g \circ (I - V_m\Pi_m) . \upsilon_N| > \epsilon \right) \\
& + P^n\left(g \circ (I - V_m\Pi_m) . \upsilon_N > \epsilon \right)
\end{aligned}
$$

表明$\{X^n\}_{n\geqslant 1}$满足 3.4.7(Ⅲ). 故由定理 3.4.7 知$\{X^n\}_{n\geqslant 1}$胎紧.

因为X^n和X都是局部平方可积半鞅,并且条件(Ⅰ)、(Ⅱ)和(Ⅲ)成立,所以由性质 1.4.13,对$\forall\, t > 0$,存在$m_0 \in \boldsymbol{N}$,使下列条件成立:

$$
\lim_{a\to\infty} \limsup_{n\to\infty} P^n(|x|^2 I_{\{|x|>a\}} . \upsilon_T^n > \eta) = 0, \forall\, \eta > 0, m \geqslant m_0, \quad x \in \boldsymbol{R}^m,
$$

(a) $\quad \sup_{s\leqslant T} |\Pi_m(A_s^n - A_s)| \xrightarrow{P} 0, \forall\, m \geqslant m_0,$

(b) $\quad \sup_{s\leqslant T} \| \Pi_{m\times m}[\langle\!\langle N^n \rangle\!\rangle_s - \langle\!\langle N \rangle\!\rangle_s] \| \xrightarrow{P} 0, \forall\, m \geqslant m_0,$

(c) $\quad g . \upsilon_t^n \xrightarrow{P} g . \upsilon_t, \forall\, t \leqslant T, g \in C_0^+(\boldsymbol{R}^m), m \geqslant m_0.$

因此由定理 4.1.5,在$[0,T]$上$\Pi_m X^n \xrightarrow{\mathscr{L}} \Pi_m X, \forall\, m \geqslant m_0$.

这表明X是$\{X^n\}_{n\geqslant 1}$唯一可能的极限过程,故$X^n \xrightarrow{\mathscr{L}} X$. 证毕.

4.3 跳跃 Markov 过程到扩散过程的弱收敛

本节中我们给出半鞅极限定理的一些应用,研究 Markov 过程序列的极限定理. 因为跳跃 Markov 过程有很好的鞅刻划,因此我们同时来研究 Markov 跳过程的极限定理.

一、正的时齐跳跃 Markov 过程到扩散的弱收敛

本小节我们给出正的时齐跳跃 Markov 过程的多项式到扩散过程弱收敛的一般结果. 利用这一命题我们证明了正的时齐跳跃 Markov 过程序列弱收敛于线性扩散过程、带漂移的 Bessel 扩散过程以及指数 Brown 运动.

设$\{X^n\}_{n\geq 1}$为定义在某一概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$上取值于$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{R})$的时齐跳跃 Markov 过程序列,$\mu_n(\mathrm{d}t,\mathrm{d}x)$为$X^n$的跳测度,$\nu_n(\mathrm{d}t,\mathrm{d}x)$为$\mu_n(\mathrm{d}t,\mathrm{d}x)$关于$X^n$的自然$\sigma$-域流的可料对偶投影,则由推论 1.2.7,我们有

$$\nu_n(\mathrm{d}t,\mathrm{d}x)=q^n(X_{t-}^n)N^n(X_{t-}^n,X_{t-}^n+\mathrm{d}x)\mathrm{d}t, \tag{3.1}$$

其中$q^n(x)\geq 0$为$\boldsymbol{R}_+$上的 Borel 可测函数,$N^n(x,\mathrm{d}y)$为$\boldsymbol{R}_+\to\boldsymbol{R}$的转移概率测度,$N^n(x,\{x\})=0$.

4.3.1 设$a(x)$和$\sigma(x)$为$(0,\infty)$上的连续函数,使得随机微分方程

$$\begin{cases}\mathrm{d}X_t=a(X_t)\mathrm{d}t+\sigma(X_t)\mathrm{d}B_t,\\ X_0=\xi>0\end{cases} \tag{3.2}$$

有唯一解X,并且X满足

$$P(\{\omega:X_t(\omega)>0,t\geq 0\})=1, \tag{3.3}$$

其中B为一维标准 Brown 运动.

4.3.2 定理 设$f(x)=x^m,m\in\boldsymbol{N},\{\alpha_n\}_{n\geq 1}$及$\{\beta_n\}_{n\geq 1}$为两正数列,$\alpha_n\uparrow\infty$,且$\dfrac{\beta_n}{\alpha_n^2}\to k^2>0$. 对$\forall\, n\geq 1$,令$Y_t^n=\dfrac{1}{\alpha_n}X_{\beta_n t}^n,\forall\, t\geq 0,Z^n=f(Y^n)$,如果下列条件成立:

(A_1) $\lim\limits_{n\to\infty}\beta_n q^n(\alpha_n x)\int_{\boldsymbol{R}}[f(y+x)-f(x)]N^n(\alpha_n x,\alpha_n x+\alpha_n\mathrm{d}y)$

$=a(f(x))$在$(0,\infty)$的紧子集上一致成立;

(A_2) $\lim\limits_{n\to\infty}\beta_n q^n(\alpha_n x)\int_{\boldsymbol{R}}[f(y+x)-f(x)]^2N^n(\alpha_n x,\alpha_n x+\alpha_n\mathrm{d}y)$

$= \sigma^2(f(x))$ 在$(0,\infty)$的紧子集上一致成立；

(A_3) $\lim_{n\to\infty}\sup_{0<x<\infty} q^n(x)\int_{\{|y|>\varepsilon\}} y^{2m}N^n(x,x+\mathrm{d}y) = 0, \forall\ \varepsilon > 0$；

(A_4) $f\left(\frac{X_0^n}{\alpha_n}\right) \xrightarrow{\mathscr{L}} \xi > 0$，

则 Z^n 依分布弱收敛于扩散过程 X，X 为(3.2)的解.

证明 设在带流的可测空间$(\overline{\boldsymbol{D}}(\boldsymbol{R}), \mathscr{D}(\boldsymbol{R}) \cap \overline{\boldsymbol{D}}(\boldsymbol{R}), \mathscr{D}_t(\boldsymbol{R}) \cap \overline{\boldsymbol{D}}(\boldsymbol{R}))$上存在概率测度 P，使得在 P 之下，坐标过程 $X_t(\omega) = \omega_t$ 满足方程(3.2). 由(3.3)不妨设 $X_t > 0, \forall\ t \geqslant 0$. (A_3)表明 X^n 为平方可积半鞅. 容易计算 X 的可料特征为

$$B = \int_0^\cdot a(\alpha_s)\mathrm{d}s, C = \widetilde{C} = \int_0^\cdot \sigma^2(\alpha_s)\mathrm{d}s, \nu = 0, \alpha \in \overline{\boldsymbol{D}}(\boldsymbol{R}). \tag{3.4}$$

由 X^n 是跳过程知 Y^n 也是跳过程，并且其跳测度为$\overline{\mu}_n(\mathrm{d}t, \mathrm{d}x) = \mu_n(\beta_n\mathrm{d}t, \alpha_n\mathrm{d}x)$，$\overline{\mu}_n$ 关于 Y^n 自然 σ-域流的可料对偶投影为

$$\overline{\nu}_n(\mathrm{d}t, \mathrm{d}x) = \beta_n q^n(\alpha_n Y_{t-}^n)N^n(\alpha_n Y_{t-}^n, \alpha_n Y_{t-}^n + \alpha_n\mathrm{d}x)\mathrm{d}t.$$

由于 $Y^n = Y_0^n + x.(\overline{\mu}_n - \overline{\nu}_n)$，利用 $It\hat{o}$ 公式有

$$\begin{aligned} Z^n &= f(Y_0^n) + f'(Y_-^n).Y^n + \sum_{s\leqslant\cdot}[f(Y_s^n) - f(Y_{s-}^n) \\ &\quad - \Delta Y_s^n f'(Y_{s-}^n)] \\ &= f(Y_0^n) + [f(Y_-^n + x) - f(Y_-^n)].(\overline{\mu}_n - \overline{\nu}_n) \\ &\quad + [f(Y_-^n + x) - f(Y_-^n)].\overline{\nu}_n. \end{aligned} \tag{3.5}$$

条件(A_3)表明关于 Y^n 的自然 σ-域流 $M^n = [f(Y_-^n + x) - f(Y_-^n)].(\overline{\mu}_n - \overline{\nu}_n)$ 是平方可积鞅，并且

$$\begin{aligned} \langle M^n \rangle &= [f(Y_-^n + x) - f(Y_-^n)]^2.\overline{\nu}_n \\ &= \int_0^\cdot\int_R [f(Y_{s-}^n + x) - f(Y_{s-}^n)]^2 \beta_n q^n(\alpha_n Y_{s-}^n) \\ &\quad \cdot N^n(\alpha_n Y_{s-}^n, \alpha_n(Y_{s-}^n + \mathrm{d}x))\mathrm{d}s. \end{aligned}$$

由(3.5)知 Z^n 的可料对偶投影为

$$B^n = [f(Y_-^n + x) - f(Y_-^n)].\overline{\nu}_n$$

$$= \int_0^{\cdot}\int_R [f(Y_{s-}^n + x) - f(Y_{s-}^n)]\beta_n q^n(\alpha_n Y_{s-}^n)$$
$$\cdot N^n(\alpha_n Y_{s-}^n, \alpha_n(Y_{s-}^n + \mathrm{d}x))\mathrm{d}s. \tag{3.6}$$

Z^n 是纯跳过程表明 Z^n 的连续鞅部分 $(Z^n)^c = 0$,因此

$$C^n = \langle (Z^n)^c \rangle = 0, \tag{3.7}$$

所以

$$\widetilde{C}^n = \int_0^{\cdot}\int_R [f(Y_{s-}^n + x) - f(Y_{s-}^n)]^2 \beta_n q^n(\alpha_n Y_{s-}^n)$$
$$\cdot N^n(\alpha_n Y_{s-}^n, \alpha_n(Y_{s-}^n + \mathrm{d}x))\mathrm{d}s. \tag{3.8}$$

因为 f 为 $(0,\infty)$ 上严格单调增加的连续函数,所以 f^{-1} 存在且可微,因此有

$$Z^n = f(Y_0^n) + \int_0^{\cdot}\int_R [f(Y_{s-}^n + x) - f(Y_{s-}^n)]\mu_n(\beta_n \mathrm{d}s, \alpha_n \mathrm{d}x)$$
$$= f(Y_0^n) + \int_0^{\cdot}\int_R y\mu_n\Big(\beta_n ds, \alpha_n \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} f^{-1}(y + f(Y_{s-}^n))$$
$$\cdot I_{\{y+f(Y_{s-}^n)>0\}}\mathrm{d}y\Big). \tag{3.9}$$

从而 Z^n 的跳测度为

$$\widetilde{\mu}^n(\mathrm{d}t, \mathrm{d}x) = \mu_n\Big(\beta_n \mathrm{d}t, \alpha_n \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f^{-1}(x + f(Y_{t-}^n)) I_{\{x+f(Y_{t-}^n)>0\}}\mathrm{d}x\Big). \tag{3.10}$$

$\widetilde{\mu}^n$ 关于 Y^n 的自然 σ- 域流的可料对偶投影为

$$\widetilde{\nu}^n(\mathrm{d}t, \mathrm{d}x) = \nu_n\Big(\beta_n \mathrm{d}t, \alpha_n \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f^{-1}(x + f(Y_{t-}^n)) I_{\{x+f(Y_{t-}^n)>0\}}\mathrm{d}x\Big). \tag{3.11}$$

对任意的 $p > q > 0$,S_p、T_q 和 $\tau_{p,q}$ 的定义同第一节,由于

$$\mathrm{Var}(B_t^{\tau_{p,q}}) = \int_0^{t\wedge\tau_{p,q}} |a(\alpha_s)|\mathrm{d}s \leqslant \sup_{q\leqslant x\leqslant p} |a(x)| \cdot t,$$

$$C_t^{\tau_{p,q}} = \int_0^{t\wedge\tau_{p,q}} \sigma^2(\alpha_s)\mathrm{d}s \leqslant \sup_{q\leqslant x\leqslant p} \sigma^2(x) \cdot t$$

及 $\nu = 0$,所以存在单调增加连续函数 $F_{p,q}(t)$,使得 $\mathrm{Var}(B^{\tau_{p,q}})$ 和

$C^{\tau_{p,q}}$被$F_{p,q}$强控制，即4.1.7(I)成立. 因为$v=0$，所以4.1.7(II)成立是显然的. 方程(3.2)存在按分布唯一解表明鞅问题$\mathscr{S}(\sigma(\xi),X|\xi;B,C,0)$存在唯一解（见[11]P225 推论），从而4.1.7(III)成立. 由(3.4)可推得连续性条件4.1.7(IV)成立. (A_4)意为$\{Z^n\}_{n\geqslant 1}$满足条件4.1.7(V). 往证4.1.7(VI)成立.

对任意的$p>q>0, t>0$,

$$
\begin{aligned}
&|B^n_{t\wedge\tau^n_{p,q}} - B_{t\wedge\tau_{p,q}}\circ Z^n| \\
&\leqslant \int_0^{t\wedge\tau^n_{p,q}} \Big| \int_R [f(Y^n_{s-}+x) - f(Y^n_{s-})]\beta_n q^n(\alpha_n Y^n_{s-}) \\
&\quad \cdot N^n(\alpha_n Y^n_{s-}, \alpha_n(Y^n_{s-}+\mathrm{d}x)) - a(f(Y^n_{s-}))\Big| \mathrm{d}s \\
&= \int_0^t \Big| \int_R [f(Y^n_{s\wedge\tau^n_{p,q}-}+x) - f(Y^n_{s\wedge\tau^n_{p,q}-})]\beta_n q^n(\alpha_n Y^n_{s\wedge\tau^n_{p,q}-}) \\
&\quad \cdot N^n(\alpha_n Y^n_{s\wedge\tau^n_{p,q}-}, \alpha_n(Y^n_{s\wedge\tau^n_{p,q}-}+\mathrm{d}x)) \\
&\quad - a(f(Y^n_{s\wedge\tau^n_{p,q}-}))\Big| \mathrm{d}s \\
&\leqslant \sup_{q\leqslant y\leqslant p} \Big| \beta_n \int_R [f(y+x) - f(y)] q^n(\alpha_n y) N^n(\alpha_n y, \alpha_n y + \alpha_n \mathrm{d}x) \\
&\quad - a(f(y))\Big| \cdot t,
\end{aligned}
\tag{3.12}
$$

这是因为$q\leqslant Y^n_{s\wedge\tau^n_{p,q}}\leqslant p$. 同样地

$$
\begin{aligned}
&|\widetilde{C}^n_{t\wedge\tau^n_{p,q}} - \widetilde{C}_{t\wedge\tau_{p,q}}\circ Z^n| \\
&\leqslant \sup_{q\leqslant y\leqslant p} \Big| \beta_n \int_R [f(y+x) - f(y)]^2 q^n(\alpha_n y) \\
&\quad \cdot N^n(\alpha_n y, \alpha_n y + \alpha_n \mathrm{d}x) - \sigma^2(f(y))\Big| \cdot t.
\end{aligned}
\tag{3.13}
$$

由条件(A_1)、(A_2)、(3.12)和(3.13)可推得

$$
\sup_{s\leqslant t} |B^n_{s\wedge\tau^n_{p,q}} - B_{s\wedge\tau_{p,q}}\circ Z^n| \xrightarrow{P} 0, \quad n\to\infty, \quad \forall\, t>0,
$$

$$
\widetilde{C}^n_{t\wedge\tau^n_{p,q}} - \widetilde{C}_{t\wedge\tau_{p,q}}\circ Z^n \xrightarrow{P} 0, \quad n\to\infty, \quad \forall\, t>0.
$$

$p > q > 0$ 的任意性表明 4.1.7(Ⅵ)a),b) 成立.

又对任意的 $g \in C_0^+(\boldsymbol{R})$，存在常数 $G > 0$ 及 $\epsilon > 0$，使得在 $(-\varepsilon,\varepsilon)$ 上 $g(x) = 0$，并且 $g \leqslant G$. $\forall\ p > q > 0$、$t > 0$，由(3.11)我们有

$$
\begin{aligned}
g.\ \widetilde{v}^n_{t\wedge\tau^n_{p,q}} &\leqslant G\int_0^{t\wedge\tau^n_{p,q}}\int_{\{x:|x|\geqslant\epsilon\}}\widetilde{v}^n(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x) \\
&= G\int_0^{t\wedge\tau^n_{p,q}}\int_{\{x:|x|\geqslant\epsilon\}}v_n\Big(\beta_n\mathrm{d}s,\alpha_n\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f^{-1}(x+f(Y^n_{s-})) \\
&\quad \cdot I_{\{x-f(Y^n_{s-})>0\}}\mathrm{d}x\Big) \\
&= G\int_0^{t\wedge\tau^n_{p,q}}\int_{\{y:|f(y+Y^n_{s-})-f(Y^n_{s-})|\geqslant\epsilon\}}v_n(\beta_n\mathrm{d}s,\alpha_n\mathrm{d}y) \\
&\overset{(*)}{\leqslant} \frac{\beta_n G}{\varepsilon^2}\int_0^{t\wedge\tau^n_{p,q}}\int_{\{y:|y|\geqslant\delta\}}|f(y+Y^n_{s-})-f(Y^n_{s-})|^2 v_n(\beta_n\mathrm{d}s,\alpha_n\mathrm{d}y) \\
&\leqslant \frac{\beta_n Gt}{\varepsilon^2}\sup_{0<x<\infty}\int_{\{y:|y|\geqslant\delta\}}|f(y+x)-f(x)|^2 q^n(x) \\
&\quad \cdot N^n(x,x+\alpha_n\mathrm{d}y) \\
&= \frac{\beta_n Gt}{\epsilon^2}\sup_{0<x<\infty}\int_{\{y:|y|\geqslant\delta\}}\left|f\Big(\frac{1}{\alpha_n}y+x\Big)-f(x)\right|^2 q(x) \\
&\quad \cdot N^n(x,x+\mathrm{d}y).
\end{aligned}
\tag{3.14}
$$

因为 $f\Big(\dfrac{1}{\alpha_n}y+x\Big)-f(x)$ 是$\dfrac{1}{\alpha_n}y$ 的不含常数项的 m 次多项式，所以由(3.14)可推得

$$
g.\ \widetilde{v}^n_{t\wedge\tau^n_{p,q}} \leqslant \frac{\beta_n mMt}{\alpha_n^2\varepsilon^2}\sup_{0<x<\infty}\int_{\{y:|y|\geqslant\delta\}}y^{2m}q^n(x)N^n(x,x+\mathrm{d}y).
$$

由于 $\beta_n/\alpha_n^2 \to k^2 > 0$，$M > 0$ 为常数，因此由假设(A_3)即得

(*)注　因为 $q \leqslant Y^n_{s\wedge\tau^n_{p,q}} \leqslant p$，$f$ 连续，所以利用 f 在有限闭区间上一致连续性知对任意 $\varepsilon > 0$，必存在 $\delta > 0$，使得 $\{y:|f(x+y)-f(x)|\geqslant\epsilon\} \subset \{y:|y|\geqslant\delta\}$，$\forall\ x \in [q,p]$. 不等式(*)是由这一事实以及车贝晓夫不等式得到的.

$$g\cdot\widetilde{\upsilon}^n_{t\wedge\tau^n_{p,q}}\xrightarrow{P}0.$$

从而4.1.7(Ⅵ)c)成立.故由定理4.1.7知$f(Y^n)\xrightarrow{\mathscr{L}}X$,$X$满足随机微分方程(3.2).证毕.

4.3.3　定理　如果把定理4.3.2中的条件(A_3)换为

(A'_3) 存在$\delta>0$,使得

$$\sup_{\substack{0\leqslant x<\infty\\ n\geqslant 1}} q^n(x)\int_{\boldsymbol{R}}|y^n|^{2+\delta}N^n(x,x+\mathrm{d}y)<\infty,$$

则定理4.3.2的结论仍然成立.

证明　我们只要证明4.1.7(Ⅵ)c)成立.

对任意的$g\in C_0^+(\boldsymbol{R})$,存在常数$G>0$及$\varepsilon>0$,使得$g(x)=0,x\in(-\varepsilon,\varepsilon)$,并且$g\leqslant G$.$\forall\ p>q>0,t>0$,由(3.11)我们有

$$\begin{aligned}
g\cdot\widetilde{\upsilon}^n_{t\wedge\tau^n_{p,q}} &\leqslant \beta_n G\int_0^{t\wedge\tau^n_{p,q}}\int_{\{x:|x|\geqslant\varepsilon\}}\widetilde{\upsilon}^n(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)\\
&=\beta_n G\int_0^{t\wedge\tau^n_{p,q}}\int_{\{y:|f(y+Y^n_{s-})-f(Y^n_{s-})|\geqslant\varepsilon\}}q^n(\alpha_nY^n_{s-})\\
&\quad\cdot N^n(\alpha_nY^n_{s-},\alpha_n(Y^n_{s-}+\mathrm{d}y))\mathrm{d}s\\
&\leqslant\frac{\beta_nG}{\varepsilon^{2+\delta}}\int_0^{t\wedge\tau^n_{p,q}}\int_{\boldsymbol{R}}|f(y+Y^n_{s-})-f(Y^n_{s-})|^{2+\delta}q^n(\alpha_nY^n_{s-})\\
&\quad\cdot N^n(\alpha_nY^n_{s-},\alpha_n(Y^n_{s-}+\mathrm{d}y))\mathrm{d}s\\
&=\frac{\beta_nG}{\varepsilon^{2+\delta}}\int_0^t\int_{\boldsymbol{R}}\left|f(\frac{1}{\alpha_n}y+Y^n_{s\wedge\tau^n_{p,q}-})-f(Y^n_{s\wedge\tau^n_{p,q}-})\right|^{2+\delta}\\
&\quad\cdot q^n(\alpha_nY^n_{s\wedge\tau^n_{p,q}-})N^n(\alpha_nY^n_{s\wedge\tau^n_{p,q}-},\alpha_nY^n_{s\wedge\tau^n_{p,q}-}+\mathrm{d}y)\mathrm{d}s\\
&\leqslant\frac{\beta_nmMt}{(\alpha_n\varepsilon)^{2+\delta}}\sup_{\substack{0\leqslant x<\infty\\ n\geqslant 1}}q^n(x)\int_{\boldsymbol{R}}|y^n|^{2+\delta}N^n(x,x+\mathrm{d}y).
\end{aligned}$$

由条件(A'_3)及$\beta_n/\alpha_n^2\to k^2>0$知

$$g\cdot\widetilde{\upsilon}^n_{t\wedge\tau^n_{p,q}}\xrightarrow{P}0,$$

$p>q>0$的任意性表明4.1.7(Ⅵ)c)成立.定理得证.

4.3.4 注 在上述两定理中,我们只要求 $a(x)$ 和 $\sigma(x)$ 在 $(0,\infty)$ 上有定义且连续,而无需要求它在整个实空间上有定义. 有了这两个定理我们就可以处理 $a(x)$ 和 $\sigma(x)$ 在 $x=0$ 处无定义的情形,例如下面处理的 Bessel 扩散过程的漂移系数 $a(x) = \frac{\alpha-1}{2x}$ 就是这种情形.

下面我们将给出定理 4.3.2 和 4.3.3 的具体应用. 在以下的讨论中都假设 $\int_R y^2 N^n(x,\mathrm{d}y) < \infty, \forall\ x \in (0,\infty)$. 记

$$m^n(x) = \int_R y N^n(x, x+\mathrm{d}y),$$

$$\sigma^n(x) = \int_R y^2 N^n(x, x+\mathrm{d}y).$$

4.3.5 定理 设 α_n、β_n 和定理 4.3.2 中的相同,并假设

(B_1) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{\beta_n} q^n(\alpha_n x) m^n(\alpha_n x) = (cx+b)/k$, b、c 为常数,在 $(0,\infty)$ 的紧子集上一致成立;

(B_2) $\lim\limits_{n\to\infty} q^n(\alpha_n x)\sigma^n(\alpha_n x) = ax/k^2$, a 为常数在 $(0,\infty)$ 的紧子集上一致成立;

(B_3) $\sup\limits_{0<x<\infty} q^n(x)\int_{|y|>\varepsilon} y^2 N^n(x, x+\mathrm{d}y) \to 0, n\to\infty$, $\forall\ \varepsilon > 0$;

(B_4) $X^n/\alpha_n \xrightarrow{\mathscr{L}} \xi > 0$.

如果 $2b \geqslant a > 0$,则 $Y^n \xrightarrow{\mathscr{L}} Y$,其中 Y 为随机微分方程

$$\begin{cases} \mathrm{d}Y_t = \sqrt{aY_t}\,\mathrm{d}B_t + (cY_t + b)\mathrm{d}t, \\ Y_0 = \xi \end{cases} \tag{3.15}$$

的唯一解,称为线性扩散过程.

证明 因为 $b \geqslant \frac{a}{2} > 0$ 和 $\xi > 0$,所以由[14]的例 8.2 知方

程(3.15)的解 Y 满足

$$P(\{\omega:Y_t(\omega)>0,t\geqslant 0\})=1,$$

因此不妨设 $Y_t>0,\forall\ t\geqslant 0$.

对于(3.15), $a(x)=cx+b,\sigma(x)=\sqrt{ax}$. 在定理 4.3.2 中取 $f(x)=x$. 由(B_3)和(B_4)即得(A_3)和(A_4)成立. 下面只要验证(A_1)和(A_2)成立.

对任意 $x>0$, 我们有

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\beta_n q^n(\alpha_n x)\int_R[f(x+y)-f(x)]N^n(\alpha_n x,\alpha_n x+\alpha_n \mathrm{d}y)\\
=&\lim_{n\to\infty}\beta_n q^n(\alpha_n x)\int_R yN^n(\alpha_n x,\alpha_n x+\alpha_n \mathrm{d}y)\\
=&\lim_{n\to\infty}\frac{\beta_n}{\alpha_n}q^n(\alpha_n x)m^n(\alpha_n x)\\
=&k(cx+b)/k=cx+b,\\
&\lim_{n\to\infty}\beta_n q^n(\alpha_n x)\int_R[f(x+y)-f(x)]^2N^n(\alpha_n x,\alpha_n x+\alpha_n \mathrm{d}y)\\
=&\lim_{n\to\infty}\frac{\beta_n}{\alpha_n^2}q^n(\alpha_n x)\sigma^n(\alpha_n x)=k^2\cdot ax/k^2=ax,
\end{aligned}$$

上述极限在$(0,\infty)$的紧子集上一致成立是由假设给出的, 故由定理 4.3.2 知 $Y^n\xrightarrow{\mathscr{L}}Y$. 证毕.

4.3.6 注 由定理 4.3.3 知: 如果把(B_3)换为

(B'_3) 存在 $\delta>0$, 使得

$$\sup_{\substack{0<x<\infty\\ n\geqslant 1}}q^n(x)\int_R|y|^{2+\delta}N^n(x,x+\mathrm{d}y)<\infty,$$

则定理 4.3.5 的结论仍然成立.

记 $C(\boldsymbol{R})$ 为 $\boldsymbol{R}_+$ 上连续函数的全体. 令 $\mathscr{F}=\mathscr{D}(\boldsymbol{R})\cap C(\boldsymbol{R})$, $\mathscr{F}_t=\mathscr{D}_t(\boldsymbol{R})\cap C(\boldsymbol{R}),t\geqslant 0$. 假设 X 为概率空间$(C(\boldsymbol{R}),\mathscr{F},\mathscr{F}_t,P)$上的连续局部鞅, 并且 $M=\exp\left\{X-\frac{1}{2}\langle X\rangle\right\}$ 也是鞅. $\forall\ t\geqslant 0$, 令

$$\hat{P}_t(A) = E(M_t I_A), \quad A \in \mathscr{F}_t,$$

则 $\hat{P}_t$ 是 $(C(\boldsymbol{R}), \mathscr{F}_t)$ 上的测度，且 $\hat{P}_t|_{\mathscr{F}_s} = \hat{P}_s, \forall\ 0 \leqslant s \leqslant t$. 从而存在 $(C(\boldsymbol{R}), \mathscr{F})$ 上的概率测度 $\hat{P}$，使得 $\hat{P}|_{\mathscr{F}_t} = \hat{P}_t$（参见[14]，p176 ~ p178），$\hat{P}$ 称为关于概率测度 P 密度为 M 的概率测度，记为 $\hat{P} = M.P$.

4.3.7 定理 α_n 和 β_n 的假设和定理 4.3.2 相同，并假设

(C_1) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{\beta_n} q'(\alpha_n x) m^n(\alpha_n x) = \dfrac{b}{k} + \dfrac{kc}{x}$，b、c 为常数，在 $(0,\infty)$ 的紧子集上一致成立；

(C_2) $\lim\limits_{n\to\infty} q^n(\alpha_n x)\sigma^n(\alpha_n x) = 1/k^2$，

在 $(0,\infty)$ 的紧子集上一致成立；

$(C_3) = (B_2)$ 或 $(C'_3) = (B'_3)$；

$(C_4) = (B_4)$.

如果假设 $k^2 c > \dfrac{1}{2}$，则 $Y^n \xrightarrow{\mathscr{L}} Y$，$Y$ 为随机微分方程

$$\begin{cases} \mathrm{d}Y_t = \left(b + \dfrac{\alpha - 1}{2Y_t}\right)\mathrm{d}t + \mathrm{d}B_t, \\ Y_t = \xi \end{cases} \tag{3.16}$$

的唯一解，称 Y 为 α 阶带漂移的 Bessel 扩散过程，$\alpha = 1 + 2k^2c$，B 为一维标准 Brown 运动.

证明　设 Y 为定义在上述带流的概率空间 $(C(\boldsymbol{R}), \mathscr{F}, \mathscr{F}_t, P)$ 上，B 为一维标准 Brown 运动. 令

$$M_t = \exp\left\{\int_0^t b\mathrm{d}B_s - \frac{1}{2}b^2 t\right\} = \exp\left\{bB_t - \frac{1}{2}b^2 t\right\}, \quad t \geqslant 0,$$

则 M 为 $(\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$ 鞅，再令 $\hat{P} = M.P$，由 Girsanov 变换定理知 $\widetilde{B}_t = B_t - bt, t \geqslant 0$ 是 $(C(\boldsymbol{R}), \mathscr{F}, \mathscr{F}_t, \hat{P})$ 上的 Brown 运动. 在概率测度 $\hat{P}$ 下，方程(3.16)变为

$$
\begin{cases}
dY_t = \dfrac{\alpha - 1}{2Y_t}dt + d\,\widetilde{B}_t, \\
Y_0 = \xi.
\end{cases}
\tag{3.17}
$$

设 Y 为方程(3.17)的解,则由 $It\hat{o}$ 公式知 Y^2 满足方程

$$
\begin{cases}
dZ_t = 2\sqrt{Z_t}d\,\widetilde{B}_t + \alpha dt, \\
Z_0 = \xi^2.
\end{cases}
\tag{3.18}
$$

而(3.18)为线性扩散方程,由 $\alpha = 1 + 2k^2c$ 及 $k^2c \geqslant \frac{1}{2}$ 知 $\alpha \geqslant 2$,从而方程(3.18)的唯一解具有性质

$$
\hat{P}(\{\omega: Z_t(\omega) > 0, t \geqslant 0\}) = 1. \tag{3.19}
$$

对任意 $T > 0$,由(3.19)知

$$
\hat{P}(\{\omega: Z_t(\omega) > 0, t \leqslant T\}) = 1.
$$

由 $\hat{P}$ 的定义知限制在$(C(\boldsymbol{R}),\mathscr{F}_T)$上,$\hat{P}$ 和 P 是相互绝对连续的,从而有

$$
P(\{\omega: Z_t(\omega) > 0, t \leqslant T\}) = 1, \quad \forall\, T > 0.
$$

因此 $P(\{\omega: Z_t(\omega) > 0, t \geqslant 0\}) = 1$. 因为 $Y_0 = \xi > 0$,所以有 $P(\{\omega: Y_t(\omega) > 0, t \geqslant 0\}) = 1$. 我们可以假设 $Y_t > 0, t \geqslant 0$,即方程(3.16)有正解. 按照假设我们只要验证(A_1)和(A_2)成立. 为此,只要取 $f(x) = x$,和定理 4.3.5 证法相同我们知道命题成立. 定理得证.

为了给出定理 4.3.2 对于 f 是高次多项式情形的应用,我们给出下一定理,当然这一结论可由 4.3.7 直接推出.

4.3.8 定理 如果将定理 4.3.7 中的条件(C_3)换为

(C'') (Ⅰ) $\sup\limits_{\substack{0<x<\infty \\ n\geqslant 1}} q^n(x)\int_{\boldsymbol{R}} y^4 N^n(x, x+dy) < \infty$,

(Ⅱ) $\sup\limits_{0<x<\infty} q^n(x)\int_{|y|>\varepsilon} y^4 N^n(x, x+dy) \to 0, n \to \infty$,

$\forall\, \varepsilon > 0.$

则$(Y^n)^2 \xrightarrow{\mathscr{L}} Z$，$Z$ 满足方程

$$\begin{cases} dZ_t = (\alpha + 2b\sqrt{Z_t})dt + 2\sqrt{Z_t}dB_t, \\ Z_0 = \xi^2. \end{cases} \tag{3.20}$$

证明　设 Y 满足方程(3.16)，则由 $It\hat{o}$ 公式知 Y^2 满足方程(3.20)，定理4.3.7 的证明表明方程(3.20) 的解为正. 在4.3.2 中取 $f(x) = x^2$，由假设只要验证(A_1) 和(A_2) 成立即可. 在这里 $a(x) = \alpha + 2b\sqrt{x}$，$\sigma(x) = 2\sqrt{x}$. 对任意 $x > 0$，由假设条件(C_1)、(C_2) 和(C'')(Ⅰ) 我们有

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\beta_n q^n(\alpha_n x)\int_R [f(x+y) - f(x)]N^n(\alpha_n x, \alpha_n x + \alpha_n dy) \\
=& \lim_{n\to\infty}\beta_n q^n(\alpha_n x)\int_R (2xy + y^2)N^n(\alpha_n x, \alpha_n x + \alpha_n dy) \\
=& 2x\lim_{n\to\infty}\frac{\beta_n}{\alpha_n}q^n(\alpha_n x)m^n(\alpha_n x) + \lim_{n\to\infty}\frac{\beta_n}{\alpha_n^2}q^n(\alpha_n x)\sigma^n(\alpha_n x) \\
=& 2xk\left(\frac{b}{k} + \frac{kc}{x}\right) + 1 = 2bx + \alpha, \\
&\lim_{n\to\infty}\beta_n q^n(\alpha_n x)\int_R [f(x+y) - f(x)]^2 N^n(\alpha_n x, \alpha_n x + \alpha_n dy) \\
=& \lim_{n\to\infty}\beta_n q^n(\alpha_n x)\int_R [2xy + y^2]^2 N^n(\alpha_n x, \alpha_n x + \alpha_n dy) \\
=& 4x^2\lim_{n\to\infty}\frac{\beta_n}{\alpha_n^2}q^n(\alpha_n x)\sigma^n(\alpha_n x) + 4x\lim_{n\to\infty}\frac{\beta_n}{\alpha_n^3}q^n(\alpha_n x)\int_R y^3 N^n(\alpha_n x, \\
& \alpha_n x + dy) + \lim_{n\to\infty}\frac{\beta_n}{\alpha_n^4}q^n(\alpha_n x)\int_R y^4 N^n(\alpha_n x, \alpha_n x + dy) \\
=& 4x^2,
\end{aligned}$$

由假设上述极限在$(0,\infty)$ 的紧子集上一致成立，所以由 4.3.2 知命题成立. 定理得证.

对 $q^n(x)$，$N^n(x, dy)$ 作如下假设：

(D_1)　(Ⅰ) $\lim_{x\to\infty} q^n(x) = q^n(\infty)$，$0 < q^n(\infty) < \infty$，$n \geq 1$，

(Ⅱ) 存在 $\mathscr{B}(\boldsymbol{R})$ 上的概率测度 $N^n(\infty, dy)$，使得

$\int_R y^2 N^n(\infty,\mathrm{d}y) < \infty$. 对 $\forall\ x \in \boldsymbol{R}_+$, $\int_R y^2 N^n(x,\mathrm{d}y) < \infty$.

令

$$m^n(\infty) = \int_R y N^n(\infty,\mathrm{d}y),\ \sigma^n(\infty) = \int_R y^2 N^n(\infty,\mathrm{d}y);$$

(D_2) 记 $k_n = [q^n(\infty)\sigma^n(\infty)]^{-\frac{1}{2}}, k_n \to k > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} k_n \sqrt{n}\, q^n(\infty)m^n(\infty) = b;$$

(D_3) $\lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ x\to\infty}} x[q^n(x)m^n(x) - q^n(\infty)m^n(\infty)] = c > 0$;

(D_4) $\lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ x\to\infty}} k_n^2 q^n(x)\sigma^n(x) = 1$;

(D_5) $\sup\limits_{\substack{n\geqslant 1 \\ 0\leqslant x<\infty}} q^n(x)\int_R y^4 N^n(x,x+\mathrm{d}y) < \infty$;

(D_6) $k_n X_0^n/\sqrt{n} \xrightarrow{\mathscr{L}} \xi > 0$.

4.3.9 推论 取 $\beta_n = n, \alpha_n = \sqrt{n}/k_n$, 如果 $k^2 c \geqslant \frac{1}{2}$, 则在条件 $(D_1) \sim (D_6)$ 下, $Y^n \xrightarrow{\mathscr{L}} Y$, 其中 Y 为方程(3.16)的解.

证明 首先注意到以下事实: 设 $\{f_n(x)\}_{n\geqslant 1}$ 为 $\boldsymbol{R}_+$ 上的实值函数列, 如果 $\lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ x\to\infty}} f_n(x) = a$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(\sqrt{n}\,x/k_n) = a$ 在 $(0,\infty)$ 的紧子集上一致成立. 下面我们只要证明 4.3.7 中的条件全部成立.

(D_5) 可推得 (C'_3) 成立, (D_6) 表明 (C_4) 被满足. 下面验证 (C_1) 和 (C_2) 成立. 对任意 $x > 0$, 由 $(D_2) \sim (D_4)$ 可得

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \sqrt{\beta_n}\, q^n(\alpha_n x)m^n(\alpha_n x) \\
&= \lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\, q^n(\sqrt{n}\,x/k_n)m^n(\sqrt{n}\,x/k_n) \\
&= \frac{k}{x}\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}\,x}{k_n}[q^n(\sqrt{n}\,x/k_n)m^n(\sqrt{n}\,x/k_n) - q^n(\infty)m^n(\infty)] \\
&\quad + \lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\, q^n(\infty)m^n(\infty)
\end{aligned}$$

$$= \frac{ck}{x} + \frac{b}{k},$$

$$\lim_{n\to\infty} q^n(\alpha_n x)\sigma^n(\alpha_n x) = \frac{1}{k^2}.$$

上述极限在$(0,\infty)$的紧子集上一致成立，即(C_1)和(C_2)成立. 由4.3.7命题得证.

4.3.10 定理 假设

(E_1) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n}\, q^n(\sqrt{n}\, x)m^n(\sqrt{n}\, x) = \frac{1}{2}x$

在$(0,\infty)$的紧子集上一致成立，

(E_2) $\lim\limits_{n\to\infty} q^n(\sqrt{n}\, x)\sigma^n(\sqrt{n}\, x) = x^2$

在$(0,\infty)$的紧子集上一致成立，

$(E_3) = (B_3)$ 或 $(E'_3) = (B'_3)$，

(E_4) $X_0^n/\sqrt{n} \xrightarrow{\mathscr{L}} \xi > 0$，

则 $X^n/\sqrt{n} \xrightarrow{\mathscr{L}} e^B$，$B$为一维Brown运动，称$e^B$为几何Brown运动.

证明 令$Y = e^B$，则由$It\hat{o}$公式可知Y满足方程

$$\mathrm{d}Y_t = Y_t \mathrm{d}B_t + \frac{1}{2}Y_t \mathrm{d}t, \quad Y_0 = \xi.$$

取$f(x) = x$，由假设条件即得定理4.3.2中的条件全部满足，所以由4.3.2命题得证.

二、非时齐跳跃Markov过程到扩散过程的弱收敛

本小节将研究非时齐Markov跳过程序列到扩散过程弱收敛的一般性定理，由此可以证明经验过程到Brown桥及非时齐跳Markov过程到Brown游弋的弱收敛.

设$\{X^n\}_{n\geq 1}$为某概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的非时齐跳跃Markov过程序列，$\mu_n(\mathrm{d}t,\mathrm{d}x)$为$X^n$的跳测度，$\nu_n(\mathrm{d}t,\mathrm{d}x)$为$\mu_n(\mathrm{d}t,\mathrm{d}x)$关于

X^n 自然 σ- 域流的可料对偶投影，则由定理 1.2.6，我们有

$$\upsilon_n(\mathrm{d}t,\mathrm{d}x) = N^n(t,X_{t-}^n;X_{t-}^n + \mathrm{d}x)\Lambda^n(X_{t-}^n,\mathrm{d}t), \tag{3.21}$$

其中 $N^n(t,x;\mathrm{d}y)$ 为 $\boldsymbol{R}_+\times\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$ 的转移概率测度，且 $N^n(t,x;\{x\}) = 0$；$\Lambda^n(x,\mathrm{d}t)$ 为 $\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}_+$ 的 σ- 有限转移测度，且 $\Lambda^n(x,\{t\})\leqslant 1$. 假设 $\Lambda^n(x,\mathrm{d}t)\ll \mathrm{d}t$（Lebesgue 测度），则 $\Lambda^n(x,\mathrm{d}t) = q^n(t,x)\mathrm{d}t$，其中 $q^n(t,x)$ 为 $\boldsymbol{R}_+\times\boldsymbol{R}$ 上的可测函数，于是(3.21) 可改写为

$$\upsilon_n(\mathrm{d}t,\mathrm{d}x) = N^n(t,X_{t-}^n;X_{t-}^n + \mathrm{d}x)q^n(t,X_{t-}^n)\mathrm{d}t. \tag{3.22}$$

在下面的讨论中均假设 $\int_0^t\int_{\boldsymbol{R}} x^2\upsilon_n(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x) < \infty, \forall\ t > 0$.

4.3.11 定理 设 $a(t,x)$、$\sigma(t,x)$ 为 $\boldsymbol{R}_+\times\boldsymbol{R}$ 上的连续函数，使得随机微分方程

$$\begin{cases}\mathrm{d}X_t = a(t,X_t)\mathrm{d}t + \sigma(t,X_t)\mathrm{d}B_t,\\ X_0 = \xi\end{cases} \tag{3.23}$$

存在按分布唯一解，其中 B 为一维标准 Brown 运动. 并且假设：对任意 $N > 0, t > 0$ 下列条件成立，

(1) $\sup\limits_{\substack{|x|\leqslant N\\ s\leqslant t}}\left|q^n(s,x)\int_{\boldsymbol{R}} yN^n(s,x;x+\mathrm{d}y) - a(s,x)\right| \to 0,\quad n\to\infty;$

(2) $\sup\limits_{\substack{|x|\leqslant N\\ s\leqslant t}}\left|q^n(s,x)\int_{\boldsymbol{R}} y^2N^n(s,x;x+\mathrm{d}y) - \sigma^2(s,x)\right| \to 0,\quad n\to\infty;$

(3) $\sup\limits_{\substack{|x|\leqslant N\\ s\leqslant t}} q^n(s,x)\int_{\{|y|\geqslant\varepsilon\}} y^2N^n(s,x;x+\mathrm{d}y) \to 0,\quad n\to\infty, \forall\ \varepsilon > 0;$

(4) $X_0^n \xrightarrow{\mathscr{L}} \xi$.

则 $X^n \xrightarrow{\mathscr{L}} X$，其中 X 为方程(3.23) 的唯一解.

证明　同定理 4.3.2 的证法类似，故略去.

下面假设 $a(t,x)$ 和 $\sigma(t,x)$ 为定义在$[0,T)\times\boldsymbol{R}$ 上的连续函

数($T>0$ 为常数),存在 $\alpha\geqslant 0,\beta\geqslant 0$($\alpha,\beta$ 不同时为 0),使得对任意 $x\in\boldsymbol{R}$,$\lim\limits_{t\to T}(T-t)^{\alpha}a(t,x)$,$\lim\limits_{t\to T}(T-t)^{\beta}\sigma(t,x)$ 均存在有限,并且随机微分方程

$$\begin{cases}\mathrm{d}X_t=a(t,X_t)\mathrm{d}t+\sigma(t,X_t)\mathrm{d}B_t, & 0\leqslant t<T,\\ X_0=\xi\end{cases}\tag{3.24}$$

在$[0,T)\times\boldsymbol{R}$ 上存在按分布唯一解 X,且 X 满足条件

$$\lim_{t\to T}X_t=\xi,\quad a.s.\tag{3.25}$$

4.3.12 定理 对任意 $n\geqslant 1$,设 $X^n=(X_t^n)_{t\leqslant T}$ 为$(\Omega^n,\mathscr{F}^n,\mathscr{F}_t^n,P^n)$ 上的跳跃 Markov 过程,μ_n 为其跳测度,ν_n 为 μ_n 关于 X^n 自然 σ-域流的可料对偶投影,并且 $\nu_n(\mathrm{d}t,\mathrm{d}x)$ 具有形式(3.22),又 $\forall\, t\leqslant T$,X_t^n 与 X_{T-t}^n 同分布. 如果对任意的 $N>0,t<T$,定理4.3.11中的条件(1)~(4)成立,则 $X^n\xrightarrow{\mathscr{L}}X$,其中 X 为方程(3.24)的满足(3.25)唯一解.

证明 任意取定 $0<\rho<T$,在$[0,\rho]$上,因为

$$X^n=X_0^n+x.\mu_n=X_0^n+x.(\mu_n-\nu_n)+x.\nu_n,$$

由假设可得 X^n 的可料特征为$(B^n,C^n,\nu^n)=(x.\nu_n,0,\nu_n)$,而且其第二修正特征为$\widetilde{C}^n=x^2.\nu_n$. 下面验证定理 4.1.1 中的条件全部满足. 对任意 $a>0,t\leqslant\rho$,由

$$\mathrm{Var}(B)_t^{S_a}=\int_0^{t\wedge S_a}|a(s,\alpha(s))|\mathrm{d}s\leqslant\sup_{\substack{|x|\leqslant a\\ s\leqslant t}}|a(s,x)|\cdot t,$$

$$\widetilde{C}_t^{S_a}=C_t^{S_a}=\int_0^{t\wedge S_a}\sigma^2(s,\alpha(s))\mathrm{d}s\leqslant\sup_{\substack{|x|\leqslant a\\ s\leqslant t}}\sigma^2(s,x)\cdot t,$$

即得局部强控制条件成立;条件 4.1.6(Ⅱ)成立是显然的,因为 $\nu=0$. 因为(3.24)有按分布唯一解,所以由[11]P225 中的推论知鞅问题 $\mathscr{S}(\sigma(\xi),X|\xi;B,C,0)$ 有唯一解. 由 $a(s,x)$ 和 $\sigma(s,x)$ 连续知映射 $\alpha\to B_t(\alpha),\widetilde{C}_t(\alpha),g.\nu_t(\alpha)(t\leqslant\rho)$ 在 $\boldsymbol{D}([0,\rho],\boldsymbol{R})$($[0,\rho]$上右连左极函数所组成的空间)上按 Skorokhod 拓扑连续. 下面只要

验证条件 4.1.6(Ⅵ) 成立.

$\forall a>0$,令 $\tau_a=S_a\wedge\rho,\tau_a^n=S_a^n\wedge\rho$,则对任意 $0<t\leqslant\rho$,

$$
\begin{aligned}
&|B^n_{t\wedge\tau_a^n}-B_{t\wedge\tau_a}\circ X^n|\\
\leqslant&\int_0^t\Big|q^n(s\wedge\tau_a^n,X^n_{s\wedge\tau_a^n-})\int_R yN^n(s\wedge\tau_a^n,X^n_{s\wedge\tau_a^n-};X^n_{s\wedge\tau_a^n-}+\mathrm{d}y)\\
&-a(s\wedge\tau_a^n,X^n_{s\wedge\tau_a^n-})\Big|\mathrm{d}s\\
\leqslant&\rho\sup_{\substack{|x|\leqslant a\\ s\leqslant\rho}}\Big|q^n(s,x)\int_R yN^n(s,x;x+\mathrm{d}y)-a(s,x)\Big|,\\
&|\widetilde{C}^n_{t\wedge\tau_a^n}-\widetilde{C}_{t\wedge\tau_a}\circ X^n|\\
\leqslant&\rho\sup_{\substack{|x|\leqslant a\\ s\leqslant\rho}}\Big|q^n(s,x)\int_R y^2N^n(s,x;x+\mathrm{d}y)-\sigma^2(s,x)\Big|.
\end{aligned}
$$

由假设条件即得

$$
\sup_{s\leqslant t}|B^n_{s\wedge\tau_a^n}-B_{t\wedge\tau_a}\circ X^n|\xrightarrow{P}0,
$$

$$
\widetilde{C}^n_{t\wedge\tau_a^n}-\widetilde{C}_{t\wedge\tau_a}\circ X^n\xrightarrow{P}0,\quad 0\leqslant t\leqslant\rho.
$$

又对任意 $g\in C_0^+(\boldsymbol{R})$,存在 $G>0$ 及 $\epsilon>0$,使得 $g(x)=0$,$|x|<\epsilon$,$g\leqslant G$. 对任意 $a>0,t\leqslant\rho$,有

$$
\begin{aligned}
&g\cdot\upsilon_{n,t\wedge\tau_a^n}\\
\leqslant&G\int_0^{t\wedge\tau_a^n}\int_{\{|x|\geqslant\epsilon\}}\upsilon_n(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)\\
\leqslant&\frac{G}{\epsilon^2}\int_0^{t\wedge\tau_a^n}\int_{\{|x|\geqslant\epsilon\}}x^2\upsilon_n(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)\\
\leqslant&\frac{G}{\epsilon^2}\sup_{\substack{|x|\leqslant a\\ s\leqslant t}}q^n(s,x)\int_{\{|y|\geqslant\epsilon\}}y^2N^n(s,x;x+\mathrm{d}y)\to0,n\to\infty.
\end{aligned}
$$

由定理 4.1.6,在 $[0,\rho]$ 上,$X^n\xrightarrow{\mathscr{L}}X$. 令 $\overline{X}_t^n=X^n_{T-t}$,由假设 $\overline{X}^n$ 与 X 同分布,因此在 $[0,\rho]$ 上也有 $\overline{X}^n\xrightarrow{\mathscr{L}}X$.

对于 $t\geqslant T$,令 $X_t^n=X_0^n,X_t=\xi$. 取 $\rho=\dfrac{2}{3}T$,则对任意 $N>0$,

$$\sup_{t\leqslant N}|X_t^n| \leqslant \sup_{t\leqslant N}|X_{t\wedge\rho}^n| + \sup_{t\leqslant N}|\overline{X}_{t\wedge\rho}^n|,$$

$$w'_N(X^n,\theta) \leqslant w'_N(X_{\cdot\wedge\rho}^n,\theta) + w'_N(\overline{X}_{\cdot\wedge\rho}^n,\theta).$$

由于$\{X_{\cdot\wedge\rho}^n\}_{n\geqslant1}$和$\{\overline{X}_{\cdot\wedge\rho}^n\}_{n\geqslant1}$均为胎紧，所以由定理 3.2.3 知$\{X^n\}_{n\geqslant1}$胎紧.

对任意的$0=t_0<t_1<\cdots<t_p$，若$t_p<T$，由上述所证可知$(X_{t_0}^n,X_{t_1}^n,\cdots,X_{t_p}^n)\xrightarrow{\mathscr{L}}(X_{t_0},X_{t_1},\cdots,X_{t_p})$. 假设存在$k$使得$t_{k-1}<T<t_k$，由上所证$(X_{t_0}^n,X_{t_1}^n,\cdots,X_{t_{k-1}}^n)\xrightarrow{\mathscr{L}}(X_{t_0},X_{t_1},\cdots,X_{t_{k-1}})$，而$X_{t_k}^n=\cdots=X_{t_p}^n=X_0^n$，$X_{t_k}=\cdots=X_{t_p}=\xi$，由$X_0^n\xrightarrow{\mathscr{L}}\xi$知$(X_{t_0}^n,X_{t_1}^n,\cdots,X_{t_p}^n)\xrightarrow{\mathscr{L}}(X_{t_0},X_{t_1},\cdots,X_{t_p})$，所以$X$是$\{X^n\}_{n\geqslant1}$唯一可能的极限，又$\{X^n\}_{n\geqslant1}$胎紧，故$X^n\xrightarrow{\mathscr{L}}X$. 定理证毕.

下面我们给出定理 4.3.12 的一些应用.

跳跃 Markov 过程序列到 Brown 游弋(Brownian excursions)的弱收敛

设$T>0$取定，考虑如下的随机微分方程

$$\begin{cases}\mathrm{d}X_t=\left(3-\dfrac{2X_t}{T-t}\right)\mathrm{d}t+2(X_t\vee 0)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}B_t,\\ X_0=0,\end{cases}\tag{3.26}$$

则方程(3.26)有唯一解$X_t, 0\leqslant t<T$，并且有

$$P(\{X_t>0,0<t<T\})=1\tag{3.27}$$

和$\lim\limits_{t\to T}X_t=0$，$P_0$-a.s.，其中$P_0$为函数空间$W=\{w: w$为$[0,T]$上的连续函数，$w(0)=w(T)=0, w(t)>0, t\in(0,T)\}$上的概率测度，因此条件(3.25)成立.

4.3.13 定理 设跳过程$X_t^n(0\leqslant t\leqslant T)$满足 4.3.12 中的条件，又假设$\forall\ a>0, 0<t<T$，

(1) $$\sup_{\substack{0\leqslant x\leqslant a\\ s\leqslant t}}\left|q^n(s,x)\int_{\mathbf{R}}yN^n(s,x;x+\mathrm{d}y)-\left(3-\frac{2x}{T-t}\right)\right|$$

$\to 0, n \to \infty$,

(2) $\sup_{\substack{0 \leqslant x \leqslant a \\ s \leqslant t}} \left| q^n(s,x) \int_R y^2 N^n(s,x;x+\mathrm{d}y) - 4x \right| \to 0, n \to \infty$,

(3) $\sup_{\substack{0 \leqslant x \leqslant a \\ s \leqslant t}} q^n(s,x) \int_{\{|y| \geqslant \varepsilon\}} y^2 N^n(s,x;x+\mathrm{d}y) \to 0, n \to \infty$,

$\forall \varepsilon > 0$,

(4) $X_0^n \xrightarrow{P} 0$,

则 $X^n \xrightarrow{\mathscr{L}} X$,其中 X 为方程(3.26)的解.

证明　在方程(3.26)中,$a(s,x) = 3 - \frac{2x}{T-s}$,$\sigma(s,x) = 2\sqrt{x \vee 0}$. 取 $\alpha = 1, \beta = 0$,即得 $\lim_{t \to T}(t-T)a(t,x) = +2x$ 存在. 由(3.27)知定理4.3.12中的条件全部满足,因此 $X^n \xrightarrow{\mathscr{L}} X$,$X$ 为(3.26)的解,称为Brown游弋.

4.3.14　定理　经验过程到Brown桥的弱收敛

设 $\{\xi_n\}_{n \geqslant 1}$ 是 $i.i.d.$ 随机变量序列,ξ_i 服从(0,1]上的均匀分布. 对任意的 $t \in [0,1]$,令

$$X_t^n = \sum_{i=1}^n I_{\{\xi_i \leqslant t\}}, \quad V_t^n = \sqrt{n}(X_t^n - t),$$

则 V^n 为[0,1]上的跳过程,且 $V_0^n = V_1^n = 0$. 由于 $\{\xi_n\}_{n \geqslant 1}$ 独立,且都为(0,1]上的均匀分布,所以对任意 $t \in [0,1]$,V_t^n 与 V_{1-t}^n 同分布. 并且 V^n 的可料特征为

$$B_t^n = -\int_0^t \frac{V_s^n}{1-s}\mathrm{d}s,$$

$$C^n = 0, \quad \widetilde{C}_t^n = \int_0^t \left[1 - \frac{V_s^n}{\sqrt{n}(1-s)}\right]\mathrm{d}s,$$

$$\nu^n(\mathrm{d}t,\mathrm{d}x) = \left[n - \sqrt{n}\frac{V_t^n}{1-t}\right]\varepsilon_{\{1/\sqrt{n}\}}(\mathrm{d}x)\mathrm{d}t,$$

(参见[16]性质 Ⅱ-3.36).

对于 Brown 桥 $a(s,x)=\frac{-x}{1-s},\sigma(s,x)=1$，对任意的 $t\in(0,1),a>0$，有

$$\sup_{\substack{s\leqslant t\\|x|\leqslant a}}\left|q^n(s,x)\int_R yN^n(s,x;x+\mathrm{d}y)-a(s,x)\right|$$

$$=\sup_{\substack{s\leqslant t\\|x|\leqslant a}}\left|-\frac{x}{1-s}-\frac{-x}{1-s}\right|=0,$$

$$\sup_{\substack{s\leqslant t\\|x|\leqslant a}}\left|q^n(s,x)\int_R y^2N^n(s,x;x+\mathrm{d}y)-\sigma^2(s,x)\right|$$

$$\leqslant\frac{a}{\sqrt{n}\,(1-t)}\to 0,n\to\infty,$$

$$\sup_{\substack{s\leqslant t\\|x|\leqslant a}}q^n(s,x)\int_{\{|y|\geqslant\varepsilon\}}y^2N^n(s,x;x+\mathrm{d}y)=0,\forall\ \frac{1}{\sqrt{n}}\leqslant\varepsilon,$$

所以定理 4.3.12 中的条件全部成立，因此 $V^n\xrightarrow{\mathscr{L}}X$，$X$ 为 Brown 桥.

三、Markov 链序列到扩散过程的弱收敛

本节给出了 Markov 链序列到扩散过程弱收敛的一般性定理，利用这一结论，我们证明了对称随机游动弱收敛于 Brown 运动，Ehrenfest 模型弱收敛于 Ornstein-Uhlenbeck 扩散过程.

设 Y^n 为 Markov 链，转移概率测度为 $P_n(x,\mathrm{d}y)$，$\{\beta_n\}_{n\geqslant1}$ 为正数列，$\beta_n\uparrow\infty,n\uparrow\infty$. 令 $X_t^n=Y^n_{[\beta_n t]}$，则 X^n 为非时齐的 Markov 跳过程，其跳跃点为 $\left\{\frac{k}{\beta_n}\right\}_{n\geqslant1}$. 设 μ^n 为 X^n 的跳测度，按照定理1.2.3 容易计算 μ^n 关于 X^n 自然 σ- 域的可料对偶投影为

$$\nu^n(\mathrm{d}t,\mathrm{d}x)=P_n(X_{t-}^n,X_{t-}^n+\mathrm{d}x)\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon_{\left(\frac{k}{\beta_n}\right)}(\mathrm{d}t)I_{\left\{\frac{k-1}{\beta_n}\leqslant t<\frac{k}{\beta_n}\right\}}.\tag{3.28}$$

令

$$a_n(x) = \beta_n \int_{\mathbf{R}} (y - x) P_n(x, \mathrm{d}y),$$

$$\sigma_n^2(x) = \beta_n \int_{\mathbf{R}} (y - x)^2 P_n(x, \mathrm{d}y),$$

$$B_t^n = \int_0^{[\beta_n t]/\beta_n} a_n(X_s^n) \mathrm{d}s = \int_0^{[\beta_n t]/\beta_n} a_n(X_{s-}^n) \mathrm{d}s,$$

$$C_t^n = \int_0^{[\beta_n t]/\beta_n} \left[\sigma_n^2(X_s^n) - \frac{1}{\beta_n} a^2(X_s^n) \right] \mathrm{d}s$$

$$= \int_0^{[\beta_n t]/\beta_n} \left[\sigma_n^2(X_{s-}^n) - \frac{1}{\beta_n} a^2(X_{s-}^n) \right] \mathrm{d}s,$$

则 B^n、C^n 关于 X^n 的自然 σ- 域流均为可料过程.

由 Y_n 的 Markov 性我们有

$$a_n(X_s^n) = \beta^n \int_{\mathbf{R}} (y - X_s^n) P_n(X_s^n, \mathrm{d}y)$$

$$= \beta_n \int_{\mathbf{R}} (y - Y_{[\beta_n s]}^n) P_n(Y_{[\beta_n s]}^n, \mathrm{d}y)$$

$$= \beta_n E_n [Y_{[\beta_n s]+1}^n - Y_{[\beta_n s]}^n | Y_{[\beta_n s]}^n],$$

$$B_t^n = \int_0^{[\beta_n t]/\beta_n} a_n(X_s^n) \mathrm{d}s$$

$$= \beta_n \int_0^{[\beta_n t]/\beta_n} E_n [Y_{[\beta_n s]+1}^n - Y_{[\beta_n s]}^n | Y_{[\beta_n s]}^n] \mathrm{d}s$$

$$= \int_0^{[\beta_n t]} E_n [Y_{[s]+1}^n - Y_{[s]}^n | \mathscr{F}_s^n] \mathrm{d}s,$$

其中$(\mathscr{F}_k^n)_{k\geqslant 0}$ 是 Y^n 的自然 σ- 域流. 于是对任意 $t > s \geqslant 0$,

$$E_n [B_t^n - B_s^n | \mathscr{F}_{[\beta_n s]}^n]$$

$$= E_n \left[\int_{[\beta_n s]}^{[\beta_n t]} E_n (Y_{[\tau]+1}^n - Y_{[\tau]}^n | \mathscr{F}_{[\tau]}) \mathrm{d}\tau \middle| \mathscr{F}_{[\beta_n s]} \right]$$

$$= \int_{[\beta_n s]}^{[\beta_n t]} E_n \left[Y_{[\tau]+1}^n - Y_{[\tau]}^n | \mathscr{F}_{[\beta_n s]}^n \right] \mathrm{d}\tau$$

$$= E_n \left[\sum_{j=[\beta_n s]+1}^{[\beta_n t]} (Y_j^n - Y_{j-1}^n) | \mathscr{F}_{[\beta_n s]}^n \right]$$

$$= E_n \left[Y_{[\beta_n t]}^n - Y_{[\beta_n s]}^n | \mathscr{F}_{[\beta_n s]}^n \right]$$

$$= E_n (X_t^n - X_s^n | \mathscr{F}_{[\beta_n s]}^n),$$

即 $E_n(X_t^n - B_t^n | \mathscr{F}^n_{[\beta_n s]}) = X_s^n - B_s^n$，这表明 $X^n - B^n$ 是一个鞅. 以下我们假设存在常数 $C > 0$，使得 $|Y_k^n - Y_{k-1}^n| \leqslant C, k, n \geqslant 1$，从而存在截尾函数 h，使 $B^n = h.\upsilon^n$.

同理，我们也可以证明 $(X^n)^2 - C^n$ 是鞅，因此

$$C^n = h^2.\upsilon^n + \sum_{s \leqslant \cdot} (\Delta B_s^n)^2.$$

4.3.15 定理 设 $a(x)$ 为 $\boldsymbol{R}$ 上连续函数，$\sigma(x)$ 为 $\boldsymbol{R}$ 上单调增加的连续函数，使得随机微分方程

$$\begin{cases} \mathrm{d}X_t = a(X_t)\mathrm{d}t + \sigma(X_t)\mathrm{d}B_t, \\ X_0 = \xi \end{cases} \tag{3.29}$$

存在唯一解. $a_n(x)$ 和 $\sigma_n^2(x)$ 的定义同上. 假设对于任意 $N > 0$，$\varepsilon > 0$，

$$\sup_{|x| \leqslant N} |a_n(x) - a(x)| \to 0, \quad n \to \infty, \tag{3.30}$$

$$\sup_{|x| \leqslant N} |\sigma_n^2(x) - \sigma^2(x)| \to 0, \quad n \to \infty, \tag{3.31}$$

$$\sup_{|x| \leqslant N} \beta_n P_n(x, |x - y| > \varepsilon) \to 0, \quad n \to \infty. \tag{3.32}$$

设 Y^n 为以 $P_n(x, \mathrm{d}y)$ 为转移函数的 Markov 链，定义 $X_t^n = Y^n_{[\beta_n t]}$，如果 $Y_0^n \xrightarrow{\mathscr{L}} \xi$，则 $X^n \xrightarrow{\mathscr{L}} X$，其中 X 为方程(3.29)的解.

证明　我们只要验证定理 4.1.6 中的条件全部满足即可. 因为 $a(x)$ 和 $\sigma(x)$ 为连续函数，所以对任意的 $a > 0$、$t > 0$，

$$\begin{aligned} (\mathrm{Var}B^{S_a})_t &= \int_0^{t \wedge S_a} |a(\alpha(s))| \mathrm{d}s \\ &= \int_0^t |a(\alpha(s \wedge S_a))| \mathrm{d}s \leqslant \sup_{|x| \leqslant a} |a(x)| \cdot t, \end{aligned}$$

$$C_t^{S_a} = \int_0^{t \wedge S_a} \sigma^2(\alpha(s)) \mathrm{d}s \leqslant \sup_{|x| \leqslant a} \sigma^2(x) \cdot t.$$

从而局部强控制条件 4.1.6(Ⅰ)成立. 由 $\upsilon = 0$ 即得 4.1.6(Ⅱ)成立. 方程(3.29)存在唯一解表明鞅问题 $\mathscr{S}(\sigma(X_0), X | \xi; B, C, 0)$ 存在局部唯一解，即 4.1.6(Ⅲ)满足. 由 $B_t(\alpha) = \int_0^t a(\alpha(s))\mathrm{d}s$，

$C_t(a)=\int_0^t \sigma^2(a(s))\mathrm{d}s$ 及 $a(x)$ 和 $\sigma(x)$ 连续性可知条件 4.1.6(Ⅳ)成立，又 $Y_0^n \xrightarrow{\mathscr{L}} \xi$，因此我们只要验证 4.1.6(Ⅵ)成立.

对任意的 $a>0, t>0$,

$$
\begin{aligned}
&\sup_{s\leqslant t}|B^n_{s\wedge S^n_a}-(B_{s\wedge S_a})\circ X^n| \\
&=\sup_{s\leqslant t}\left|\beta_n\int_0^{[\beta_n(s\wedge S^n_a)]/\beta_n}\int_R (y-X^n_{\tau-})P_n(X^n_{\tau-},\mathrm{d}y)\mathrm{d}\tau\right. \\
&\quad\left.-\int_0^{s\wedge S^n_a}a(X^n_{\tau-})\mathrm{d}\tau\right| \\
&\leqslant \sup_{s\leqslant t}\left|\beta_n\int_0^{s\wedge S^n_a}\left[\int_R (y-X^n_{\tau-})P_n(X^n_{\tau-},\mathrm{d}y)-a(X^n_{\tau-})\right]\mathrm{d}\tau\right| \\
&\quad+\sup_{s\leqslant t}\left|\beta_n\int_{[\beta_n(s\wedge S^n_a)]/\beta_n}^{s\wedge S^n_a}\int_R (y-X^n_{\tau-})P_n(X^n_{\tau-},\mathrm{d}y)\mathrm{d}\tau\right| \\
&\leqslant \int_0^t\left|\beta_n\int_R (y-X^n_{\tau\wedge S^n_a})P(X^n_{\tau\wedge S^n_{a-}},\mathrm{d}y)-a(X^n_{\tau\wedge S^n_{a-}})\right|\mathrm{d}\tau \\
&\quad+\sup_{s\leqslant t}\int_{[\beta_n(s\wedge S^n_a)]}^{\beta_n(s\wedge S^n_a)}|E_n(Y^n_{[\tau]+1}-Y^n_{[\tau]}|\mathscr{F}^n_{[\tau]})|\mathrm{d}\tau \\
&\leqslant \sup_{|x|\leqslant a}|a_n(x)-a(x)|\cdot t \\
&\quad+M_1\sup_{s\leqslant t}\Big(\beta_n(s\wedge S^n_a)-[\beta_n(s\wedge S^n_a)]\Big),
\end{aligned}
\tag{3.33}
$$

$$
\begin{aligned}
&|C^n_{t\wedge S^n_a}-(C_{t\wedge S_a})\circ X^n| \\
&=\left|\int_0^{[\beta_n(t\wedge S^n_a)]/\beta_n}\left[\sigma^2_n(X^n_{s-})-\frac{1}{\beta_n}a^2_n(X^n_{s-})\right]\mathrm{d}s-\int_0^{t\wedge S^n_a}\sigma^2(X^n_{s-})\mathrm{d}s\right| \\
&\leqslant \int_0^{t\wedge S^n_a}|\sigma^2_n(X^n_{s-})-\sigma^2(X^n_{s-})|\mathrm{d}s+\left|\int_{[\beta_n(t\wedge S^n_a)]/\beta_n}^{t\wedge S^n_a}\sigma^2_n(X^n_{s-})\mathrm{d}s\right| \\
&\quad+\frac{1}{\beta_n}\int_0^{[\beta_n(t\wedge S^n_a)]/\beta_n}a^2_n(X^n_{s-})\mathrm{d}s \\
&\leqslant \sup_{|x|\leqslant a}|\sigma^2_n(x)-\sigma^2(x)|\cdot t+M_2\Big(\beta_n(t\wedge S^n_a)-[\beta_n(t\wedge S^n_a)]\Big) \\
&\quad+\frac{1}{\beta_n}\sup_{|x|\leqslant a}a^2_n(x),
\end{aligned}
\tag{3.34}
$$

其中 M_1 和 M_2 为正常数. 由假设条件(3.30)、(3.31) 以及 $\beta_n \uparrow \infty$, 我们有

$$\sup_{s\leqslant t} |B^n_{s\wedge S^n_a} - (B_{s\wedge S_a})\circ X^n| \xrightarrow{P} 0,$$

$$C^n_{t\wedge S^n_a} - (C_{s\wedge S_a})\circ X^n \xrightarrow{P} 0,$$

即条件 4.1.6(Ⅵ)a)、b) 成立.

又对任意 $a>0, t>0$ 及 $g\in C^+_0(\boldsymbol{R})$, 存在 $\varepsilon>0$ 及 $G>0$, 使得当 $x\in(-\varepsilon,\varepsilon)$ 时, $g(x)=0, g(x)\leqslant G. \forall x\in\boldsymbol{R}$, 由(3.28)

$$g.\nu^n_{t\wedge S^n_a} = \int_0^{t\wedge S^n_a}\int_{\boldsymbol{R}} g(x)\nu^n(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)$$

$$\leqslant G\int_0^{t\wedge S^n_a}\int_{|x|\geqslant\varepsilon} P_n(X^n_{s-}, X^n_{s-}+\mathrm{d}x)\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon_{\left(\frac{k}{\beta_n}\right)}(\mathrm{d}s) I_{\left\{\frac{k-1}{\beta_n}\leqslant s<\frac{k}{\beta_n}\right\}}$$

$$= G\int_0^t\int_{|x|\geqslant\varepsilon} P_n(X^n_{s\wedge S^n_a-}, X^n_{s\wedge S^n_a-}+\mathrm{d}x)$$

$$\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon_{\left(\frac{k}{\beta_n}\right)}(\mathrm{d}s) I_{\left\{\frac{k-1}{\beta_n}\leqslant s\wedge S^n_a<\frac{k}{\beta_n}\right\}}$$

$$\leqslant G\int_0^t \sup_{|y|\leqslant a} P_n(y, |x-y|\geqslant\varepsilon)\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon_{\left(\frac{k}{\beta_n}\right)}(\mathrm{d}s) I_{\left\{\frac{k-1}{\beta_n}\leqslant s<\frac{k}{\beta_n}\right\}}$$

$$\leqslant G([\beta_n t]+1)\sup_{|y|\leqslant a} P_n(y, |y-x|\geqslant\varepsilon)$$

$$= G\frac{[\beta_n t]+1}{\beta_n}\cdot\sup_{|y|\leqslant a}\beta_n P_n(y, |y-x|\geqslant\varepsilon).$$

从而由条件(3.32), $g.\nu^n_{t\wedge S^n_a}\xrightarrow{P} 0$, 即 4.1.6(Ⅵ)c) 成立, 故由定理 4.1.6 知命题成立. 定理得证.

4.3.16 例子 对称随机游动到 Brown 运动的弱收敛

设 $\xi_1,\xi_2,\cdots$ 为一列独立同分布的随机变量序列, 其分布为 $P(\xi_n=1)=P(\xi_n=-1)=\frac{1}{2}$, $\{\alpha_n\}_{n\geqslant 1}$ 为一列正数, 并且 $\alpha_n\downarrow 0$. 令 $Y^n_k=\alpha_n^{1/2}\sum_{j=1}^{k}\xi_j, k\geqslant 1, Y^n_0=0$, 则 Y^n 是 Markov 链, 其转移概率

函数为

$$
\begin{aligned}
&P_n(j\alpha_n^{1/2},(j+1)\alpha_n^{1/2})\\
&=P(Y_{k+1}^n=(j+1)\alpha_n^{1/2}\,|\,Y_k^n=j\alpha_n^{1/2})\\
&=P(Y_k^n=j\alpha_n^{1/2},\xi_{k+1}=1\,|\,Y_k^n=j\alpha_n^{1/2})=\frac{1}{2},\\
&\quad P_n(j\alpha_n^{1/2},(j-1)\alpha_n^{1/2})=\frac{1}{2}.
\end{aligned}
$$

而对于任意的$\epsilon>0$,存在N,使当$n\geqslant N$时,$\alpha_n<\epsilon^2$,所以当$n\geqslant N$时,

$$P_n(x,|x-y|>\epsilon)=0. \tag{3.35}$$

取$\beta_n=\dfrac{1}{\alpha_n}$,则$\beta_n\uparrow\infty$,由(3.35)知对任意$\epsilon>0$,$\sup\limits_{|x|\leqslant a}\beta_n P_n(x,|x-y|>\epsilon)\to 0$,即条件(3.32)成立.又$A=\{j\alpha_n^{1/2},n\geqslant 1,j=\pm 1,2,\cdots\}$为$\boldsymbol{R}$中的稠密子集,对任意的$x\in\boldsymbol{R}$,$A$的任意子序列$\{j_n\alpha_n^{1/2}\}_{n\geqslant 1}$满足$j_n\alpha_n^{1/2}\to x$,则

$$
\begin{aligned}
a_n(j_n\alpha_n^{1/2})&=\frac{1}{\alpha_n}\int_{\boldsymbol{R}}(y-j_n\alpha_n^{1/2})P_n(j_n\alpha_n^{1/2},\mathrm{d}y)\\
&=\frac{1}{2\alpha_n}\{[(j_n+1)\alpha_n^{1/2}-j_n\alpha_n^{1/2}]+[(j_n-1)\alpha_n^{1/2}\\
&\quad -j_n\alpha_n^{1/2}]\}=0,\\
\sigma_n^2(j_n\alpha_n^{1/2})&=\frac{1}{2\alpha_n}\{[(j_n+1)\alpha_n^{1/2}-j_n\alpha_n^{1/2}]^2+[(j_n-1)\alpha_n^{1/2}\\
&\quad -j_n\alpha_n^{1/2}]^2\}=1.
\end{aligned}
$$

因此$\lim\limits_{n\to\infty}a_n(j_n\alpha_n^{1/2})=0$,$\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_n^2(j_n\alpha_n^{1/2})=1$.这表明$a_n(x)$和$\sigma_n^2(x)$在$\boldsymbol{R}$的任意紧子集上分别一致收敛于0和1,又$Y_0^n=0$,Brown运动的漂移系数为0、扩散系数为1,所以由定理4.3.15即得$X^n\xrightarrow{\mathscr{L}}B$,$X^n=Y^n_{[\frac{t}{\alpha_n}]}$,$B$为一维标准Brown运动.

4.3.17 例子 Ehrenfest模型到Ornstein-Uhlenbeck扩散过程的弱收敛

设 ξ_k^n 为仅取 $+1$ 和 -1 两个值的随机变量，令 $Z_k^n = \sum_{j=0}^{k} \xi_j^n$. 设 $|Z_k^n| \leqslant a_n$，并且

$$P\left(\xi_{k+1}^n = \begin{matrix} +1 \\ -1 \end{matrix} \middle| Z_k^n\right) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left(1 - \frac{Z_k^n}{a_n}\right) \\ \frac{1}{2}\left(1 + \frac{Z_k^n}{a_n}\right). \end{cases} \tag{3.36}$$

由定义知 Z^n 为 Markov 链. 这就是 Ehrenfest 模型. 设 $\{h_n\}_{n\geq 1}$ 为正数列，且 $h_n \downarrow 0$. $\{\beta_n\}_{n\geq 1}$ 单调上升，且满足条件 $h_n^2\beta_n \to \sigma^2 > 0$，$\frac{\beta_n}{a_n} \to \beta$. 令 $X_t^n = h_n Z_{[\beta_n t]}^n$. 如果 $h_n Y_0^n \xrightarrow{\mathscr{L}} \xi$，则 $X^n \xrightarrow{\mathscr{L}} X$，其中 X 为 Ornstein-Uhlenbeck 扩散过程，它满足随机微分方程

$$\begin{cases} \mathrm{d}X_t = -\beta X_t \mathrm{d}t + \sigma \mathrm{d}B_t, \\ X_0 = \xi, \end{cases}$$

其中 B 为一维标准 Brown 运动.

证明　令 $Y^n = h_n Z^n$，则 Y^n 仍是 Markov 链，其转移概率函数为

$$\begin{aligned} & P_n(jh_n, (j+1)h_n) \\ = & P(Y_{k+1}^n = (j+1)h_n | Y_k^n = jh_n) \\ = & P(\xi_{k+1}^n = 1 | Z_k^n = j) \\ = & \frac{1}{2}\left(1 - \frac{jh_n}{a_n h_n}\right) \\ = & \frac{1}{2}\left(1 - \frac{j}{a_n}\right), \end{aligned}$$

同样计算得

$$P_n(jh_n, (j-1)h_n) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{j}{a_n}\right).$$

由于 $h_n \downarrow 0$，所以对任意 $\varepsilon > 0$，存在 $N > 0$，使当 $n \geqslant N$ 时，$|h_n| < \varepsilon$. 从而 $P_n(x, |x-y| \geqslant \varepsilon) = 0$，即当 $n \geqslant N$ 时，$\sup\limits_x \beta_n P_n(x,$

$|x-y|\geqslant\varepsilon)=0$，这表明(3.32)成立. 又 $A=\{jh_n,n\geqslant 1, j=\pm 1,\pm 2,\cdots\}$ 为 $\boldsymbol{R}$ 的稠密子集，对任意的 $x\in\boldsymbol{R}$，任意子序列 $\{j_nh_n\}_{n\geqslant 1}\subset A$ 满足条件 $j_nh_n\to x$，

$$
\begin{aligned}
a_n(j_nh_n) &= \beta_n\int_{\boldsymbol{R}}(y-j_nh_n)P_n(j_nh_n,\mathrm{d}y)\\
&= \frac{1}{2}\beta_n\left\{[(j_n+1)h_n-j_nh_n]\left(1-\frac{j_n}{a_n}\right)\right.\\
&\qquad\left.+[(j_n-1)h_n-j_nh_n]\left(1+\frac{j_n}{a_n}\right)\right\}\\
&= -\beta_n\frac{j_nh_n}{a_n}\to-\beta x,\\
\sigma_n^2(j_nh_n) &= \beta_n\int_{\boldsymbol{R}}(y-j_nh_n)^2P_n(j_nh_n,\mathrm{d}y)\\
&= \frac{1}{2}\beta_n\left\{[(j_n+1)h_n-j_nh_n]^2\left(1-\frac{j_n}{a_n}\right)\right.\\
&\qquad\left.+[(j_n-1)h_n-j_nh_n]^2\left(1+\frac{j_n}{a_n}\right)\right\}\\
&= \beta_nh_n^2\to\sigma^2.
\end{aligned}
$$

由所取子序列的任意性知 $a_n(x)\to-\beta x,\sigma_n^2(x)\to\sigma^2$ 在 $\boldsymbol{R}$ 的紧子集上一致成立，再加上初始分布的弱收敛，由定理 4.3.15 知 X^n 依分布弱收敛于 O-U 扩散过程.

4.4 随机积分的弱收敛

设半鞅序列 $\{X^n\}_{n\geqslant 1}$ 依分布收敛于半鞅 X，局部有界可料过程序列 $\{H^n\}_{n\geqslant 1}$ 依分布收敛于局部有界可料过程 H，问在什么条件下随机积分 $H^n.X^n$ 依分布收敛于随机积分 $H.X$？这就是我们本节要讨论的主要问题.

一、半鞅序列的UT(Uniform Tension)性

4.4.1 定义 设X^n是带流的概率空间$(\Omega^n,\mathscr{F}^n,\mathscr{F}_t^n,P^n)$上的半鞅,$\mathscr{H}_t^n$是形如下述可料过程$H^n$的集合:

$$H_s^n = Y_0^n + \sum_{i=1}^{k} Y_{t_i}^n I_{]t_i,t_{i+1}]}(s),$$

其中$Y_{t_i}^n$是$\mathscr{F}_{t_i}^n$可测,$|Y_{t_i}^n| \leqslant 1, 0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = t$为$[0,t]$的一个分割.半鞅序列$\{X^n\}_{n\geqslant 1}$被称为具有UT性,如果对任意$t>0$,$\left\{\mathscr{L}\left(\int_0^t H_s^n \mathrm{d}X_s^n\right), n \geqslant 1, H^n \in \mathscr{H}_t^n\right\}$胎紧,其中$\mathscr{L}(X)$表示随机变量$X$的分布.

4.4.2 定理 设X是$(\Omega,\mathscr{F},\mathscr{F}_t,P)$上的右连左极过程,则$X$是半鞅的充要条件是$X$具有UT性.

证明 见严加安[54]定理12.24的证明.

记$\mathscr{G}_t^n$是形如下述可料过程I^n的集合:

$$I_s^n = Y_0^n + \sum_{i=0}^{k-1} Y_{t_i}^n I_{]t_i,t_{i+1}]}(s),$$

对任意$i \geqslant 1$,$Y_{t_i}^n$是特征函数$I_{F_{t_i}^{n,p}}$的有限线性组合,$F_{t_i}^{n,p} \in \mathscr{F}_{t_i}^n$,并且$|Y_{t_i}^n| \leqslant 1$,$\{t_0,t_1,\cdots,t_k\}$是$[0,t]$的一个分割.

4.4.3 引理 下列叙述等价:

(Ⅰ) 半鞅序列$\{X^n\}_{n\geqslant 1}$具有性质UT;

(Ⅱ) $\forall\, t<\infty$,分布族$\{\mathscr{L}((H^n.X^n)_t^*), n\geqslant 1, H^n \in \mathscr{H}_t^n\}$胎紧,其中$(H^n.X^n)_t^* = \sup\limits_{s\leqslant t}|H^n.X_s^n|$;

(Ⅲ) $\forall\, t<\infty$,分布族$\{\mathscr{L}(I^n.X_t^n), n\geqslant 1, I^n \in \mathscr{G}_t^n\}$胎紧.

证明 我们只要证明:(Ⅰ)⇒(Ⅱ)和(Ⅲ)⇒(Ⅰ).

(Ⅰ)⇒(Ⅱ) 假设$\{X^n\}_{n\geqslant 1}$具有性质UT.对任意$\varepsilon>0$,存在$k>0$使得$\forall\, n\geqslant 1, H^n \in \mathscr{H}_t^n$,$P^n(|H^n.X_t^n| > k) \leqslant \varepsilon$.对固定$n$和$H^n \in \mathscr{H}_t^n$,令$T = \inf\{s\geqslant 0: |H^n.X_s^n| > k\} \wedge t$,则我们有

$$P^n[(H^n.X^n)_t^* > k] \leqslant P^n[|(I_{[0,T]}H^n).X_t^n| \geqslant k].$$

假设$\{T^p\}_{p\geqslant 1}$是趋于T单调递增的停时列，并且T^p只取有限多个值，则$(I_{[0,T^p]}H^n).X^n \xrightarrow{P^n} (I_{[0,T]}H^n).X^n, p\uparrow\infty$，但是$H^nI_{[0,T^p]} \in \mathscr{H}_t^n$，并且

$$P^n[|(I_{[0,T^p]}H^n).X_t^n| > k] < \varepsilon.$$

从而其极限$P^n[|(I_{[0,T]}H^n).X_t^n| \geqslant k] \leqslant \varepsilon$，即(Ⅱ)成立.

(Ⅲ)→(Ⅰ)因为$H^n \in \mathscr{H}_t^n$是$\mathscr{G}_t^n$中元素$I^{n,p}$的一致极限，而

$$P^n[|I^{n,p}.X_t^n| > k] < \varepsilon, \quad \forall\, p \geqslant 1,$$

所以$P^n[|H^n.X_t^n| > k] \leqslant \varepsilon$. 引理得证.

4.4.4 引理 假设半鞅序列$\{X^n\}_{n\geqslant 1}$具有性质UT，则对任意的$t > 0$，

(Ⅰ)分布族$\{\mathscr{L}((X^n)_t^*), n \geqslant 1\}$胎紧，

(Ⅱ)序列$\{[X^n, X^n]\}_{n\geqslant 1}$胎紧.

证明 性质(Ⅰ)是4.4.3(Ⅱ)的推论，因为我们只要取$H^n = I_{[0,t]}$即可. 往证(Ⅱ)，设$\tau = \{t_0, t_1, \cdots, t_k\}$为$[0,t]$的分割，定义$S_\tau(X^n) = \sum_{i=1}^{k}(X_{t_i}^n - X_{t_{i-1}}^n)^2$，则

$$S_\tau(X^n) = (X_t^n)^2 - (X_0^n)^2 - 2\sum_i X_{t_i}^n(X_{t_{i+1}}^n - X_{t_i}^n),$$

从而

$$S_\tau(X^n) = (X_t^n)^2 - 2k\left(\sum_i \frac{X_{t_i}^n}{k} I_{\{|X_{t_i}^n| \leqslant k\}}(X_{t_{i+1}}^n - X_{t_i}^n)\right)$$
$$+ 2\sum_i X_{t_i}^n I_{\{|X_{t_i}^n| > k\}}(X_{t_{i+1}}^n - X_{t_i}^n).$$

然而$\{(X_t^n)^2\}_{n\geqslant 1}$胎紧，$\sum_i \frac{X_{t_i}^n}{k} I_{\{|X_{t_i}^n| \leqslant k\}} I_{]t_i, t_{i+1}]} \in \mathscr{H}_t^n$可推得$\left\{k\left(\sum_i \frac{X_{t_i}^n}{k} I_{\{|X_{t_i}^n| \leqslant k\}}(X_{t_{i+1}}^n - X_{t_i}^n)\right)\right\}_{n\geqslant 1}$胎紧，又$\{\mathscr{L}((X^n)_t^*)\}_{n\geqslant 1}$胎

紧可推得 $\left\{\sum_i X_{t_i}^n I_{\{|X_{t_i}^n|>k\}}(X_{t_{i+1}}^n - X_{t_i}^n)\right\}_{n\geqslant 1}$ 胎紧，故序列 $\{S_\tau(X^n)\}_{n\geqslant 1}$ 胎紧. 因为 $S_\tau(X^n) \xrightarrow{P^n} [X^n, X^n]_t$, $|\tau| \to 0$, 其中 $|\tau| = \sup_{1\leqslant i\leqslant k}(t_i - t_{i-1})$, 所以序列 $\{[X^n, X^n]\}_{n\geqslant 1}$ 胎紧. 引理证毕.

设 $\boldsymbol{K}$ 是一 Polish 空间, 取 $\Omega^n = \Omega = D(\boldsymbol{K} \times \boldsymbol{R})$, (k, x) 表示 Ω 上的坐标过程, $\mathscr{F}_t = \bigwedge_{u>t} \sigma\{(k(s), x(s)), s \leqslant u\}$, $\mathscr{F} = \bigvee_t \mathscr{F}_t$, $\{P^n\}_{n\geqslant 1}$ 为 Ω 上一列概率测度, 使得在 P^n 下, x 为半鞅, $\mathscr{G}_t^n = \mathscr{G}_t$ 是同上定义的随机过程族.

4.4.5 引理 设 $\boldsymbol{Q}$ 是包含 0 的 $\boldsymbol{R}_+$ 的稠子集, 对 $\boldsymbol{Q}$ 的每个有限子集 $\{0 \leqslant s_0 < s_1 < \cdots < s_k\}$, 设 $\mathscr{A}(s_0, s_1, \cdots s_k)$ 为张成 Borel σ-域 $(\mathscr{B}(\boldsymbol{K} \times \boldsymbol{R}))^{k+1}$ 的代数. 对 $t \in \boldsymbol{Q}$, 记 $\mathscr{G}_t^0$ 为形如 $I_s = Y_0 + \sum_{i=0}^{k} Y_{t_i} I_{]t_i, t_{i+1}]}(s)$ 可料随机过程的集合, 且 $\forall i, Y_{t_i}$ 是形如 $I_{\{((k(s_1), x(s_1)), \cdots, (k(s_j), x(s_j))) \in A_{t_i}\}}$ 的有限线性组合, 其中 $\{s_1, \cdots, s_j\} \subset \boldsymbol{Q}$, $s_1 < s_2 < \cdots < s_j \leqslant t_i$, $A_{t_i} \in \mathscr{A}(s_1, \cdots, s_j)$, $\{t_0, t_1, \cdots, t_k\}$ 是 $[0, t]$ 的一个分割, 且 $t_i \in \boldsymbol{Q}$. 则由分布族 $\{\mathscr{L}(I.x|P^n), I \in \mathscr{G}_t^0\}$ 的胎紧性可推得 $\{\mathscr{L}(I.x|P^n), I \in \mathscr{G}_t\}$ 的胎紧性, 从而半鞅序列 $\{(x|P^n)\}_{n\geqslant 1}$ 具有 UT 性.

证明　只要证明对任一固定的 $n \geqslant 1$, $\forall I \in \mathscr{G}_t$, 存在 $I^p \in \mathscr{G}_t^0$, $p \geqslant 1$, 使得 $I^p.x_t$ 依概率 P^n 收敛到 $I.x_t$.

假设 $I = Y_0 + \sum_{i=0}^{k} Y_{t_i} I_{]t_i, t_{i+1}]}$.

(i) 由 x 的右连续性我们知 $I.x = Y_0 x_0 + \sum_{i=0}^{k} Y_{t_i}(x_{t_{i+1}} - x_{t_i})$ 依概率 P^n 成立. 对于 $t_i < t'_i$, $i = 1, 2, \cdots, k-1$, $t'_k = t_k$, 且 $t'_i \in \boldsymbol{Q}$, 同样有 $I'.x = Y_0 x_0 + \sum_{i=0}^{k} Y_{t'_i}(x_{t'_{i+1}} - x_{t'_i})$ 依概率 P^n 成立, 其中 I'

$$= Y_0 + \sum_{i=0}^{k} Y_{t'_i} I_{]t'_i, t'_{i+1}]}.$$

(Ⅱ) 对任意 $t'_i, Y_{t'_i} = \sum_p \alpha_i^p I_{F_i^p}, F_i^p \in \sigma\{(k(s), x(s)), s \leqslant t'_i\}$, 由 k 及 x 的右连续性我们有 $F_i^p \in \sigma\{(k(s), x(s)), s \in \boldsymbol{Q}, s \leqslant t'_i\}$. 而 F_i^p 是形如

$$\{((k(s_{1(l)}), x(s_{1(l)})), \cdots, ((k(s_{j(l)}), x(s_{j(l)}))) \in A_{t'_i}^c\},$$

$$A_{t'_i}^c \in \mathscr{A}(S_{1(l)}, \cdots, S_{j(l)})$$

有限并依概率 P^n 的极限，因此 $\mathscr{G}_t$ 中每一元素都是 $\mathscr{G}_t^0$ 依概率的极限点，由假设及 $I \in \mathscr{G}_t$ 我们可得 $\{\mathscr{L}(I.x \mid P^n), I \in \mathscr{G}_t\}$ 胎紧. 证毕.

4.4.6 性质 设 $\{X^n\}_{n\geqslant 1}$ 为定义在 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 上的半鞅序列，并且具有性质 UT. 如果 $Q \ll P$，并且 Q 关于 P 的密度有界，则 $\{X^n\}_{n\geqslant 1}$ 是 $(\Omega, \mathscr{F}, Q)$ 上的半鞅序列，并且仍然具有性质 UT.

证明 X^n 为 $(\Omega, \mathscr{F}, Q)$ 上的半鞅是 Girsanov 定理的直接结果. 下面我们只要证明在 $(\Omega, \mathscr{F}, Q)$ 上，半鞅序列 $\{X^n\}_{n\geqslant 1}$ 仍然具有性质 UT. 因为在 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 上，$\{X^n\}_{n\geqslant 1}$ 具有性质 UT，所以对任意 $\varepsilon > 0$，存在 $N > 0$，使得

$$\sup_{n, H^n \in \mathscr{H}_t^n} P(\{|H^n.X_t^n| \geqslant N\}) < \varepsilon.$$

又由

$$\begin{aligned}
&\sup_{n, H^n \in \mathscr{H}_t^n} Q(\{|H^n.X_t^n| \geqslant N\}) \\
&\leqslant \sup_{n, H^n \in \mathscr{H}_t^n} \int_{\{|H^n.X_t^n| \geqslant N\}} \left(\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}P}\right) \mathrm{d}P \\
&\leqslant \sup\left(\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}P}\right) \sup_{n, H^n \in \mathscr{H}_t^n} P(\{|H^n.X_t^n| \geqslant N\}) \\
&\leqslant \sup\left(\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}P}\right) \cdot \varepsilon
\end{aligned}$$

及 $\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}P}$ 有界即得结论成立. 证毕.

二、半鞅序列在UT条件下的收敛性

4.4.7 定理 假设$(\Omega^n,\mathscr{F}^n,\mathscr{F}_t^n,P^n)$为带流的概率空间，$(\mathscr{F}_t^n)_{t\geqslant 0}$满足"通常条件"，$X^n$为$(\Omega^n,\mathscr{F}^n,\mathscr{F}_t^n,P^n)$上的半鞅，并且$\{X^n\}_{n\geqslant 1}$具有性质UT，又假设$K^n$是取值于Polish空间$\boldsymbol{K}$上$(\mathscr{F}_t)$-适应的右连左极过程. 如果$D$是包含0的$\boldsymbol{R}_+$的稠子集，$(K^n,X^n)\xrightarrow{\mathscr{L}(D)}(K,X)$，则关于$\mathscr{L}(K^n,X^n)$在$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{K}\times\boldsymbol{R})$上的极限概率测度$P$及$(K,X)$所产生的右连续$\sigma$-域流$(\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}X$是半鞅. 其中$(K,X)$是$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{K}\times\boldsymbol{R})$上的坐标过程，$\xrightarrow{\mathscr{L}(D)}$表示沿集合$D$，$(K^n,X^n)$按有限维分布收敛于$(K,X)$.

证明　X的适应性是显然的. 由定理4.4.2我们只要证明X具有性质UT，即$\{\mathscr{L}(H.X_t),H\in\mathscr{H}_t\}$胎紧，其中$\mathscr{H}_t$的定义和以前相同.

对任意$\{s_1,\cdots,s_k\}\subset D$，定义投影映射

$\Pi\{s_1,\cdots,s_k\}:(k,x)\to(k(s_1),x(s_1),\cdots k(s_k),x(s_k))$.

记$\mathscr{A}(s_1,\cdots,s_k)$是概率测度$P_{\Pi\{s_1,\cdots,s_k\}}$的连续集的代数，由$\{X^n\}_{n\geqslant 1}$具有性质UT及$(K^n,X^n)$沿$D$有限维分布收敛，我们知道分布族$\{\mathscr{L}(I.X_t),I\in\mathscr{G}_t^n\}$胎紧，其中$\mathscr{G}_t^n$和4.4.5中的定义相同. 从而由引理4.4.3及引理4.4.5即得分布族$\{\mathscr{L}(H.X_t),H\in\mathscr{H}_t\}(\forall\, t>0)$胎紧，定理证毕.

注　定理4.4.7表明关于X的自然σ-域流X是半鞅.

4.4.8 推论 假设半鞅序列$\{X^n\}_{n\geqslant 1}$具有性质UT，且胎紧，则关于$\mathscr{L}(X^n)$在$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{R})$上的极限概率测度$P$及$X$所产生的右连续的$\sigma$-域流$X$是半鞅.

下面的引理证明是方便的.

4.4.9 引理 设$\{Y^n\}_{n\geqslant 1}$是定义在$(\Omega,\mathscr{F},\mathscr{F}_t,P)$上的右连左极过程，并且对任意的$T>0,\eta>0,\varepsilon>0$，存在$(\Omega,\mathscr{F},\mathscr{F}_t,P)$

上的右连左极过程序列 $\{Z^n\}_{n\geqslant 1}, Z^n = Z^n(\varepsilon,\eta,T)$，使得按 Skorokhod 拓扑 Z^n 依概率收敛，并且当 n 充分大时，有

$$P\{|Y^n - Z^n|_T^* > \varepsilon\} \leqslant \eta,$$

则按 Skorokhod 拓扑 $\{Y^n\}_{n\geqslant 1}$ 依概率收敛.

4.4.10 定理 假设 K 和 X 均为定义在带流的可测空间 $(\Omega,\mathscr{F},\mathscr{F}_t)$ 上的实值过程，P 是 $(\Omega,\mathscr{F})$ 上使得 X 关于 $(\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$ 为半鞅的概率测度，对于 $\boldsymbol{R}_+$ 的有限分割 $\tau = \{0 = t_0, t_1, \cdots, t_p\}$，定义

$$K_t^\tau = \sum_k K_{t_k} I_{[t_k,t_{k+1}[}(t), \tag{4.1}$$

对于 X_t^τ 同样定义，则

$$(K_-^\tau . X^\tau)_t = \sum_{t_{k+1}\leqslant t} K_{t_k}(X_{t_{k+1}} - X_{t_k}). \tag{4.2}$$

又设 $\{\tau_n\}_{n\geqslant 1}$ 为 $\boldsymbol{R}_+$ 的有限分割序列，使得对任意 $T > 0$ 有 $|\tau_n|_T \to 0, n\to\infty$ 成立，其中 $|\tau_n|_T = \max\limits_{t_{k+1}^n\leqslant T} |t_{k+1}^n - t_k^n|$，则按 Skorokhod 拓扑 $\{K_-^{\tau_n} . X^{\tau_n}\}_{n\geqslant 1}$ 依概率收敛于 $K_- . X$.

证明 a) 首先我们注意到：对任意 $\alpha \in \boldsymbol{D}(\boldsymbol{R})$ 及 $\boldsymbol{R}_+$ 的任意有限分割序列 $\{\tau_n\}_{n\geqslant 1}, |\tau_n| \downarrow 0$，定义 α^{τ_n} 和 (4.1) 相同，则当 $|\tau_n| \downarrow 0$ 时，$\{\alpha^{\tau_n}\}_{n\geqslant 1} \subset \boldsymbol{D}(\boldsymbol{R})$ 按 Skorokhod 收敛于 α，即

$$\alpha^{\tau_n} \xrightarrow{s.k.} \alpha, \qquad |\tau_n| \downarrow 0. \tag{4.3}$$

b) 假设 $a > 0$，使得 $P\{|\Delta K_s| = a, \exists\, s > 0\} = 0$. 定义 $\hat{K}_t^a = \sum\limits_{s\leqslant t} \Delta K_s I_{\{|\Delta K_s| > a\}}$ 和 $\widetilde{K}^a = K - \hat{K}^a$，利用 $It\hat{o}$ 公式我们容易计算

$$(\hat{K}^a)_-^{\tau_n} . X_t^{\tau_n} = X_t^{\tau_n}(\hat{K}^a)_t^{\tau_n} - \sum_{\substack{t_k^n\leqslant t\\ t_k^n\in\tau_n}} X_{t_k^n}\Big(\sum_{t_{k-1}^n < s\leqslant t_k^n} \Delta K_s I_{\{|\Delta K_s| > a\}}\Big);$$

由 (4.3) 我们有

$$(X\hat{K}^a - \sum_{s\leqslant\cdot} X_s \Delta K_s I_{\{|\Delta K_s| > a\}})^{\tau_n} \xrightarrow{s.k.} X\hat{K}^a - \sum_{s\leqslant\cdot} X_s \Delta K_s I_{\{|\Delta K_s| > a\}};$$

再利用 $It\hat{o}$ 公式我们知道上式右端是随机积分 $\hat{K}_-^a . X$.

对于任意的 $T>0$，因为

$$\sup_{t\leqslant T}|(\hat{K}^a)^{\tau_n}_-.X^{\tau_n}_t-(\hat{K}^a.X)^{\tau_n}_t|$$

$$=\sup_{t\leqslant T}\Big|\sum_{\substack{t_k^n\leqslant t\\ t_k^n\in\tau_n}}\Big[X_{t_k^n}\Big(\sum_{t_{k-1}^n<s\leqslant t_k^n}\Delta K_s I_{\{|\Delta K_s|>a\}}\Big)$$

$$-\Big(\sum_{t_{k-1}^n<s\leqslant t_k^n}X_s\Delta K_s I_{\{|\Delta K_s|>a\}}\Big)\Big]\Big|$$

$$\leqslant\sum_{\substack{t_k^n\leqslant T\\ t_k^n\in\tau_n}}\Big(\sum_{t_{k-1}^n<s\leqslant t_k^n}|X_{t_k^n}-X_s||\Delta K_s|I_{\{|\Delta K_s|>a\}}\Big),$$

又对任意 ω，在$[0,T]$上使 $|\Delta K(\omega)|>a$ 的点只有有限多个，由 X 的右连续性可得：当 $|\tau_n|\downarrow 0$ 时，上述不等式的最后一项收敛于 0，因此我们有

$$(\hat{K}^a)^{\tau_n}_-.X^{\tau_n}\xrightarrow{s.k.}\hat{K}^a_-.X,\tag{4.4}$$

即按 Skorokhod 拓扑$(\hat{K}^a)^{\tau_n}_-.X^{\tau_n}$ 按轨道收敛于 $\hat{K}^a_-.X$.

c) 对任意固定的 $m\in N$，定义

$$Z^{m,n,a}=(\widetilde{K}^a)^{\tau_m}_-.X^{\tau_n}+(\hat{K}^a)^{\tau_n}_-.X^{\tau_n},\quad n\geqslant m,$$

则我们有

$$Z^{m,n,a}\xrightarrow{s.k.}(\widetilde{K}^a)^{\tau_m}_-.X+\hat{K}^a.X,\quad n\to\infty.\tag{4.5}$$

事实上，我们首先注意到：当 $n\geqslant m$ 时，

$$((\widetilde{K}^a)^{\tau_m}_-.X)^{\tau_n}=(\widetilde{K}^a)^{\tau_m}_-.X^{\tau_n}.$$

从而由(4.3)可推得

$$(\widetilde{K}^a)^{\tau_m}_-.X^{\tau_n}\xrightarrow{s.k.}(\widetilde{K}^a)^{\tau_m}_-.X,\quad n\uparrow\infty.$$

由(4.4)我们只要考虑$(\widetilde{K}^a)^{\tau_m}_-.X$ 和 $\hat{K}^a_-.X$ 相同的跳时. 设 $t>0$ 使得$(\widetilde{K}^a)^{\tau_m}_{t-}\Delta X_t\neq 0$ 且 $\hat{K}^a_{t-}\Delta X_t\neq 0$，则有如下两种可能的情况：

Ⅰ) $t\in\tau_n$，则 $\Delta X^{\tau_n}_t\to\Delta X_t$，$n\to\infty$，并且当 $n\to\infty$ 时，

$$(\hat{K}^a)^{\tau_n}_{t-}\Delta X^{\tau_n}_t \to \hat{K}^a_{t-}\Delta X_t,\quad (\widetilde{K}^a)^{\tau_m}_{t-}\Delta X^{\tau_n}_t \to (\widetilde{K}^a)^{\tau_m}_{t-}\Delta X_t;$$

I) 如果存在 $t^n_{k(n)} \downarrow t, t^n_{k(n)} \in \tau_n$ 且 $t^n_{k(n)-1} < t < t^n_{k(n)}$，使得 $\Delta X^{\tau_n}_{t^n_{k(n)}} \to \Delta X_t$，则 $(\hat{K}^a)^{\tau_n}_{t^n_{k(n)}-} = \hat{K}^a_{t^n_{k(n)-1}}$，且当 $|\tau_n| \downarrow 0$ 时，$\hat{K}^a_{t^n_{k(n)-1}} \to \hat{K}^a_{t-}$. 又当 $t^m_k < t < t^m_{k+1}$ 时，$(\widetilde{K}^a)^{\tau_m}_{t^n_{k(n)}-} = \widetilde{K}^a_{t^m_k} = (\widetilde{K}^a)^{\tau_m}_{t-}$，因此，有

$$(\hat{K}^a)^{\tau_n}_{t^n_{k(n)}-}\Delta X^{\tau_n}_{t^n_{k(n)}} \to \hat{K}^a_{t-}\Delta X_t \text{ 和 } (\widetilde{K}^a)^{\tau_m}_{t^n_{k(n)}-}\Delta X^{\tau_n}_{t^n_{k(n)}} \to (\widetilde{K}^a)^{\tau_m}_{t-}\Delta X_t,$$

即(4.5)式成立.

d) 容易计算

$$K^{\tau_n}_{-}.X^{\tau_n} - Z^{m,n,a} = (\widetilde{K}^a)^{\tau_n}_{-}.X^{\tau_n} - (\widetilde{K}^a)^{\tau_m}_{-}.X^{\tau_n}.$$

对任意固定 $T>0, \varepsilon>0$ 及 $\eta>0$，取 $a>0$ 充分小，使得

$$\sup_{H\in\mathscr{H}_T} P\left\{(H.X)^*_T > \frac{\varepsilon}{2a}\right\} \leqslant \eta. \tag{4.6}$$

假设 $\delta>0$ 使得 $|\tau|_T \leqslant \delta$，其中 $\tau = \{0 = t_0 < t_1 < \cdots\}$，则我们有

$$P\left\{\max_{t_i\in\tau}\sup_{t_i\leqslant s<t\leqslant t_{i+1}} |\widetilde{K}^a_t - \widetilde{K}^a_s| > 2a\right\} < \eta. \tag{4.7}$$

我们取 $m\in N$，使得 $|\tau_m|_T \leqslant \delta$ 及 $n>m$，记

$$\tau_m = \{0 = t_0 < t_1 < \cdots\}, \tau_n = \{0 = s_0 < s_1 < \cdots\}, s_{k_i} = t_i.$$

令

$$A^{m,n,a} = \{[(\widetilde{K}^a)^{\tau_n}_{-}.X^{\tau_n} - (\widetilde{K}^a)^{\tau_m}_{-}.X^{\tau_n}]^*_T > \varepsilon\},$$

则

$$A^{m,n,a} = \left((A^{m,n,a} \cap \left\{\max_{t_i\in\tau_m}\sup_{t_i\leqslant s<t<t_{i+1}} |\widetilde{K}^a_t - \widetilde{K}^a_s| \leqslant 2a\right\}\right)$$
$$\cup\left(A^{m,n,a} \cap \left\{\max_{t_i\in\tau_m}\sup_{t_i\leqslant s<t<t_{i+1}} |\widetilde{K}^a_t - \widetilde{K}^a_s| > 2a\right\}\right)$$

因此，

$$A^{m,n,a} \subset \left\{\left[\sum_{t_i\leqslant\cdot}\sum_{\substack{k_i<j<k_{i+1}\\ s_{j+1}\leqslant\cdot}} ((\widetilde{K}^a_{t_i} - \widetilde{K}^a_{s_j})/2a) I_{\{|\widetilde{K}^a_{t_i} - \widetilde{K}^a_{s_j}|\leqslant 2a\}}\right.\right.$$

$$\cdot (X_{s_{j+1}} - X_{s_j})\Big]_T^* > \frac{\varepsilon}{2a}\Big\}$$

$$\cup \Big\{ \max_{t_i \in \tau_m, t_i \leqslant T} \sup_{t_i \leqslant s < t < t_{i+1}} |\widetilde{K}_t^a - \widetilde{K}_s^a| > 2a \Big\}.$$

从而由(4.6)和(4.7)可推得

$$P(A^{m,n,a}) \leqslant 2\eta. \tag{4.8}$$

利用引理 4.4.9 及 c) 的证明可知按 Skorokhod 拓扑 $\{K^{\tau_n}_{-} . X^{\tau_n}\}_{n\geqslant 1}$ 依概率收敛到 $K_{-} . X$.

e) 最后证明极限的唯一性.

对任意 $a > 0$,由(4.4)知对任意序列 $\{\tau_n\}_{n\geqslant 1}$, $|\tau_n| \downarrow 0$,都有 $(\hat{K}^a)^{\tau_n}_{-} \cdot X^{\tau_n} \xrightarrow{s.k.} \hat{K}^a_{-} . X$. 因为 $(\widetilde{K}^a)^{\tau_n}$ 关于 n 局部一致有界,且 $\forall\, t \geqslant 0$, $(\widetilde{K}^a)^{\tau_n}_{t-}$ 收敛于 $\widetilde{K}^a_{t-}$,所以由控制收敛定理可推出

$$(\widetilde{K}^a)^{\tau_n}_{-} . X \xrightarrow{P} \widetilde{K}^a_{-} . X \tag{4.9}$$

在$[0,t]$上一致成立.

依次利用(4.8)、(4.5)和(4.9),我们有:对任意的 $\varepsilon > 0$ 和 $\eta > 0$,存在 $n_0 \in N$,使得当 $n \geqslant n_0$ 及 $n \geqslant m$ 时,有

$$P(\{d_{sk}(K^{\tau_n}_{-} . X^{\tau_n}, Z^{m,n,a}) > \varepsilon\}) \leqslant \eta,$$

$$P(\{d_{sk}(Z^{m,n,a}, (\widetilde{K}^a)^{\tau_n}_{-} . X + \hat{K}^a_{-} . X) > \varepsilon\}) \leqslant \eta$$

$$P(\{d_{sk}((\widetilde{K}^a)^{\tau_n}_{-} . X + \hat{K}^a_{-} . X, K_{-} . X) > \varepsilon\}) \leqslant \eta,$$

因此

$$P(\{d_{sk}(K^{\tau_n}_{-} . X^{\tau_n}, K_{-} . X) > 3\varepsilon\}) \leqslant 3\eta.$$

(d_{sk} 表示 Skorokhod 距离函数) 定理得证.

4.4.11 定理 对任意 $n \in N$,假设 X^n 及 K^n 为$(\Omega^n, \mathscr{F}^n, \mathscr{F}^n_t, P^n)$上的实值右连左极过程,且 X^n 是半鞅,又假设$\{X^n\}_{n\geqslant 1}$具有性质 UT. 如果$(K^n, X^n) \xrightarrow{\mathscr{L}} (K, X)$,则 $K^n_{-} . X^n \xrightarrow{\mathscr{L}} K_{-} . X$,并且$(K^n_{-} . X^n, K^n, X^n) \xrightarrow{\mathscr{L}} (K_{-} . X, K, X)$.

证明　首先我们注意到随机积分 $K_{-}.X$ 有意义，因为定理 4.4.7 表明关于 (K,X) 的分布及 (K,X) 的自然 σ- 域流 X 是 $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{R}^2)$ 上的半鞅.

a)　按照著名的 Skorokhod 表现定理，我们可以假设 $\{(K^n, X^n)\}_{n\geqslant 1}$ 定义在同一个概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 上，并且按 Skorokhod 拓扑 $(K^n,X^n)\to(K,X)$，P-$a.s.$ 当我们考虑 X^n 关于 (K^n,X^n) 的自然 σ- 域流 $(\mathscr{F}_t^{(K^n,X^n)})_{t\geqslant 0}$ 时，由引理 4.4.5 和定理 4.4.7 知 $\{X,X^n, n\geqslant 1\}$ 仍然具有 UT 性，并且对任意的 $n\in \boldsymbol{N}$，X^n 关于 $(\mathscr{F}_t^{(K^n,X^n)})_{t\geqslant 0}$ 仍是半鞅(Bichteler-Dellacherie-Mokobodski 定理).

b)　取 $\boldsymbol{R}_+$ 的有限分割序列 $\{\tau_n\}_{n\geqslant 1}$，使得对每个 $n\in\boldsymbol{N}$，τ_n P-$a.s.$ 只包含 (K,X) 的连续点，任取 $\epsilon_n\downarrow 0$，由定理 4.4.10 存在单调增的数列 $\{m^n\}_{n\geqslant 1}$ 使得

$$P(\{\mathrm{d}_{sk}(K_{-}^n.X^n,(K^n)_{-}^{\tau_{m^n}}.(X^n)^{\tau_{m^n}})>\epsilon_n\})\to 0,\quad n\to\infty,$$

(此处 d_{sk} 是 $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{R}^2)$ 上的 Skorokhod 距离函数). 因此我们只要证明按 Skorokhod 拓扑

$$(K^n)_{-}^{\tau_{m^n}}.(X^n)^{\tau_{m^n}}\xrightarrow{P}K.X. \tag{4.10}$$

c)　取 $a>0$，使得 $P(\{|\Delta K_s|=a,\exists\, s>0\})=0$. (K^n,X^n) 的收敛性可推得一维过程序列 $\{\hat{K}^{n,a}X^n\}_{n\geqslant 1}$ 和 $\left\{\sum_{s\leqslant\cdot}X_s^n\Delta\hat{K}_s^{n,a}\right\}_{n\geqslant 1}$ 收敛，从而 $\left\{\hat{K}^{n,a}X^n-\sum_{s\leqslant\cdot}X_s^n\Delta\hat{K}_s^{n,a}\right\}_{n\geqslant 1}$ 收敛. 由 $It\hat{o}$ 公式可知 $\{\hat{K}_{-}^{n,a}.X^n\}_{n\geqslant 1}$ 收敛，因此我们有 $\hat{K}_{-}^{n,a}.X^n\xrightarrow{s.k.}\hat{K}_{-}^a.X$. 对每个 $n\in\boldsymbol{N}$，(4.4) 表明当 $|\tau_m|\downarrow 0$ 时，$(\hat{K}^{n,a})_{-}^{\tau_m}.(X^n)^{\tau_m}\xrightarrow{s.k}(\hat{K}^{n,a})_{-}.X^n$，因此我们可以取序列 $\{m^n\}_{n\geqslant 1}$ 使得

$$(\hat{K}^{n,a})_{-}^{\tau_{m^n}}.(X^n)^{\tau_{m^n}}\xrightarrow{s.k.}\hat{K}_{-}^a.X,\quad P\text{-}a.s. \tag{4.11}$$

对于固定的 $m\in\boldsymbol{N}$ 及 $p\in N$，(K^n,X^n) 的收敛性及 τ_p 的取法可推得

$$(\widetilde{K}^{n,a})^{\tau_m}_{-}.(X^n)^{\tau_{m+p}} \xrightarrow{s.k.} (\widetilde{K}^a)^{\tau_m}_{-}.X^{\tau_{m+p}}, \quad P\text{-}a.s.$$

同样地，对每个 $n \in N$，$(\widetilde{K}^{n,a})^{\tau_m}_{-}.(X^n)^{\tau_{m+p}} \xrightarrow{s.k.} (\widetilde{K}^{n,a})^{\tau_m}_{-}.X^n$，$(p \uparrow \infty)$. 因此我们仍然可取到 m^n 使得

$$(\widetilde{K}^{n,a})^{\tau_m}_{-}.(X^n)^{\tau_{m^n}} \xrightarrow{s.k.} (\widetilde{K}^a)^{\tau_m}_{-}.X, \quad P\text{-}a.s. \tag{4.12}$$

由(4.11)、(4.12)及(K^n, X^n)的 P-$a.s.$ 收敛性可推得

$$(\widetilde{K}^{n,a})^{\tau_m}_{-}.(X^n)^{\tau_{m^n}} + (\hat{K}^{n,a})^{\tau_{m^n}}_{-}.(X^n)^{\tau_{m^n}} \xrightarrow{s.k.} (\widetilde{K}^a)^{\tau_m}_{-}.X + \hat{K}^a_{-}.X, \quad P\text{-}a.s.$$

为了结论成立，我们只要证明对于$(\widetilde{K}^a)^{\tau_m}_{-}.X$和$\hat{K}^a_{-}.X$相同的跳时$t$，存在$t_n \to t$使得

$$(\hat{K}^{n,a})^{\tau_{m^n}}_{t_n-}\Delta(X^n)^{\tau_{m^n}}_{t_n} \to \hat{K}^a_{t-}\Delta X_t,$$

$$(\widetilde{K}^{n,a})^{\tau_m}_{t_n-}(\Delta X^n)^{\tau_{m^n}}_{t_n} \to (\widetilde{K}^a)^{\tau_m}_{t-}\Delta X_t.$$

然而(4.11)的证明表明

$$((X^n)^{\tau_{m^n}}, (\hat{K}^{n,a})^{\tau_{m^n}}_{-}.(X^n)^{\tau_{m^n}}) \xrightarrow{s.k.} (X, \hat{K}^a_{-}.X).$$

因此，同时存在$t_n \to t$，使得

$$\Delta(X^n)^{\tau_{m^n}}_{t_n} \to \Delta X_t, \qquad (\hat{K}^{n,a})^{\tau_{m^n}}_{t_n}\Delta(X^n)^{\tau_{m^n}}_{t_n} \to \hat{K}^a_t\,\Delta X_t.$$

当$t \notin \tau_m$时，存在t^m_k、$t^m_{k+1} \in \tau_m$，满足$t^m_k < t < t^m_{k+1}$，且当n充分大时，$(\widetilde{K}^{n,a})^{\tau_m}_{t_n-} = \widetilde{K}^{n,a}_{t^m_k}$，序列$\{\widetilde{K}^{n,a}_{t^m_k}\}_{n\geq 1}$收敛于$\widetilde{K}^a_{t^m_k} = (\widetilde{K}^a)^{\tau_m}_{t-}$可推得

$$(\widetilde{K}^{n,a})^{\tau_m}_{t_n-}\Delta(X^n)^{\tau_{m^n}}_{t_n} \to (\widetilde{K}^a)^{\tau_m}_{t-}\Delta X_t.$$

d) 令 $Z^{m,n,a} = (\widetilde{K}^{n,a})^{\tau_m}_{-}.(X^n)^{\tau_{m^n}} + (\hat{K}^{n,a})^{\tau_{m^n}}_{-}.(X^n)^{\tau_{m^n}}$，则

$$Z^{m,n,a} \xrightarrow{s.k.} (\widetilde{K}^a)^{\tau_m}_{-}.X + \hat{K}^a_{-}.X, \qquad P\text{-}a.s. \tag{4.13}$$

容易计算

$$(K^n)^{\tau_{m^n}}_{-}.(X^n)^{\tau_{m^n}} - Z^{m,n,a} = (\widetilde{K}^{n,a})^{\tau_{m^n}}_{-}.(X^n)^{\tau_{m^n}} - (\widetilde{K}^{n,a})^{\tau_m}_{-}.X^{\tau_{m^n}}.$$

对任意固定的$T > 0$，$\varepsilon > 0$及$\eta > 0$，由$\{X^n\}_{n\geq 1}$具有UT性可知，

当 $a>0$ 充分小时，我们有

$$\sup_n \sup_{H\in\mathscr{H}_T} P\{(H^n.X^n)_T^* > \frac{\epsilon}{2a}\} \leqslant \eta. \tag{4.14}$$

取 $\delta>0$ 使得当 $|\tau_m|_T\leqslant\delta$ 时

$$\sup_n P\Big(\Big\{\max_{t_i\in\tau_m}\sup_{t_i\leqslant s<t<t_{i+1}}|\widetilde{K}_t^{n,a}-\widetilde{K}_s^{n,a}|>2a\Big\}\Big)<\eta. \tag{4.15}$$

利用(4.14)和(4.15)，类似于(4.8)的证明可得：当 n 充分大时，

$$P(\{((K^n)_-^{\tau_m^n}.(X^n)^{\tau_m^n}-Z^{m,n,a})_T^*>\epsilon\})\leqslant 2\eta. \tag{4.16}$$

由引理 4.4.9 和(4.13)知按 Skorokhod 拓扑 $\{(K^n)_-^{\tau_m^n}.(X^n)^{\tau_m^n}\}_{n\geqslant1}$ 依概率收敛.

e) 关于极限是唯一的证明. 事实上，由(4.13)知 $Z^{m,n,a}\xrightarrow{s.k.}Z^{m,a}=((\widetilde{K}^a)_-^{\tau_m}+\hat{K}_-^a).X$. 我们已经知道 $(\widetilde{K}^a)_-^{\tau_m}.X\xrightarrow{P}\widetilde{K}_-^a.X$ 在 $\boldsymbol{R}_+$ 的紧子集上一致成立，从而按 Skorokhod 拓扑

$$Z^{m,a}\xrightarrow{P}(\widetilde{K}_-^a+\hat{K}_-^a).X=K_-.X,\quad m\uparrow\infty. \tag{4.17}$$

由(4.13)、(4.17)及c)的证明可知：对任意 $\varepsilon>0,\eta>0$，存在 m，n,a，使得

$$P(\{d_{sk}((K^n)_-^{\tau_m^n}.(X^n)^{\tau_m^n},Z^{m,n,a})<\frac{\varepsilon}{3}\})\geqslant 1-\frac{\eta}{3},$$

$$P(\{d_{sk}(Z^{m,n,a},Z^{m,a})<\frac{\varepsilon}{3}\})\geqslant 1-\frac{\eta}{3},$$

$$P(\{d_{sk}(Z^{m,a},K_-.X)<\frac{\varepsilon}{3}\})\geqslant 1-\frac{\eta}{3}.$$

这表明 $K_-.X$ 是序列 $\{K_-^n.X^n\}_{n\geqslant1}$ 依分布的唯一极限.

f) 最后证明 $(K_-^n.X^n,K^n,X^n)\xrightarrow{\mathscr{L}}(K_-.X,K,X)$. 由假设及上述证明我们容易知道按 $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{R})\times\boldsymbol{D}(\boldsymbol{R}^2)$ 上的乘积拓扑，$(K_-^n.X^n,K^n,X^n)$ 几乎处处收敛于 $(K_-.X,K,X)$（如果必要时可以取子序列），而 $K_-^n.X^n$ 与 X^n 具有相同的不连续点，所以由 $(K^n,X^n)\xrightarrow{\mathscr{L}}(K,X)$ 可知 $(K_-^n.X^n,K^n,X^n)\xrightarrow{\mathscr{L}}(K_-.X,K,X)$. 定理证毕.

4.4.12 推论 假设X^n为$(\Omega^n,\mathscr{F}^n,\mathscr{F}_t^n,P^n)$上的实值半鞅，且$\{X^n\}_{n\geq 1}$具有UT性，又设$F$为$\boldsymbol{R}$上的实值连续函数. 如果$X^n \xrightarrow{\mathscr{L}} X$，则

$$(X^n,F(X_-^n).X^n) \xrightarrow{\mathscr{L}} (X,F(X_-).X).$$

证明 因为F为连续实函数，所以由$X^n \xrightarrow{\mathscr{L}} X$可推得$(F(X^n),X^n) \xrightarrow{\mathscr{L}} (F(X),X)$. 又$\{X^n\}_{n\geq 1}$具有性质UT，因此4.4.11中的条件全部满足，故由定理4.4.11知命题成立. 证毕.

4.4.13 推论 假设X^n为$(\Omega^n,\mathscr{F}^n,\mathscr{F}_t^n,P^n)$上的实值半鞅，且$\{X^n\}_{n\geq 1}$具有UT性.

(Ⅰ) $X^n \xrightarrow{\mathscr{L}} X$可推得

$$(X^n,[X^n,X^n]) \xrightarrow{\mathscr{L}} (X,[X,X]).$$

(Ⅱ) 设F和G均为$\boldsymbol{R}$上的实值连续函数，则$X^n \xrightarrow{\mathscr{L}} X$可推得

$$(X^n,F(X_-^n).X^n,G(X_-^n).[X^n,X^n])$$
$$\xrightarrow{\mathscr{L}} (X,F(X_-).X,G(X_-).[X,X]).$$

证明 (Ⅰ) 取$F(x)=x$，由推论4.4.12可得$(X^n,X_-^n.X^n) \xrightarrow{\mathscr{L}} (X,X_-.X)$及

$$(X^n,(X^n)^2,2X_-^n.X^n) \xrightarrow{\mathscr{L}} (X,X^2,2X_-.X).$$

利用$It\hat{o}$公式我们可得

$$(X^n,[X^n,X^n]) \xrightarrow{\mathscr{L}} (X,[X,X]).$$

(Ⅱ) 利用关系式$[X^n,X^n]=(X^n)^2-2X_-^n.X^n$及(Ⅰ)立即可得. 证毕.

4.4.14 性质 设A^n为定义在$(\Omega^n,\mathscr{F}^n,\mathscr{F}_t^n,P^n)$上的有限变差过程，且对于任意的$t<\infty$，分布族$\{\mathscr{L}(\mathrm{Var}(A^n))_t,n\geq 1\}$胎

紧；又假设 K^n 为定义在 $(\Omega^n, \mathscr{F}^n, \mathscr{F}_t^n, P^n)$ 上的右连左极适应过程.

如果 $(K^n, A^n) \xrightarrow{\mathscr{L}} (K, A)$，则下列结论成立：

(a) A 是有限变差过程；

(b) $K_-^n . A^n \xrightarrow{\mathscr{L}} K_- . A$；

(c) $K^n . A^n \xrightarrow{\mathscr{L}} K . A$；

(d) $\sum_{s \leqslant \cdot} \Delta K_s^n \Delta A_s^n \xrightarrow{\mathscr{L}} \sum_{s \leqslant \cdot} \Delta K_s \Delta A_s$.

证明 (a) 不妨假设 $(K^n, A^n)(n \geqslant 1)$ 均定义在同一概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 上，且 $(K^n, A^n) \to (K, A)$，P-a.s.，特别地，我们有 $A^n(\omega) \xrightarrow{s.k.} A(\omega)$，$P$-a.s.

对任意的 $t > 0$，$\varepsilon > 0$，由 $\{\mathscr{L}(\mathrm{Var}(A^n))_t, n \geqslant 1\}$ 的胎紧性知，存在 $K > 0$ 及 $\Omega^K \subset \Omega$，使得 $P(\Omega^K) > 1 - \varepsilon$ 及 $\mathrm{Var}(A^n(\omega))_t \leqslant K$，$\forall\ \omega \in \Omega^K$. 对任意 $\omega \in \Omega^K$，取 $\{\tau^p(\omega)\}_{p \geqslant 1}$ 为 $[0, t]$ 的加细分割序列，且使得 $\tau^p(\omega)$ 的每个元素都是 $A(\omega)$ 的连续点，从而有

$$\sum_{t_i^p \in \tau^p} |A_{t_{i+1}^p}^n(\omega) - A_{t_i^p}^n(\omega)| \to \sum_{t_i^p \in \tau^p} |A_{t_{i+1}^p}(\omega) - A_{t_i^p}(\omega)|.$$

由于 $A^n(n \geqslant 1)$ 是有限变差过程，我们可推得

$$\sum_{t_i^p \in \tau^p} |A_{t_{i+1}^p}(\omega) - A_{t_i^p}(\omega)| \leqslant K,$$

即在 $[0, t]$ 上 $A(\omega)(\omega \in \Omega^K)$ 的全变差不超过 K. 由 $t > 0$ 和 $\varepsilon > 0$ 的任意性表明 A 是有限变差过程.

(b) 由分布族 $\{\mathscr{L}(\mathrm{Var}(A^n)_t), n \geqslant 1\}(\forall\ t > 0)$ 的胎紧性容易证明 $\{A^n\}_{n \geqslant 1}$ 具有UT性，从而由定理 4.4.11 及假设条件可推得 $K_-^n . A^n \xrightarrow{\mathscr{L}} K_- . A$.

(c) 由定理 4.4.11 有

$$(K_-^n . A^n, K^n, A^n) \xrightarrow{s.k.} (K_- . A, K, A), \quad P\text{-}a.s.$$

再假设(d)成立，则我们有

$$\left(K_-^n . A^n, \sum_{s\leq \cdot} \Delta K_s^n \Delta A_s^n\right) \xrightarrow{s.k.} \left(K_- . A, \sum_{s\leq \cdot} \Delta K_s \Delta A_s\right).$$

因为 $K_- . A$ 和 $\sum_{s\leq \cdot} \Delta K_s \Delta A_s$ 有相同的跳时 t，从而存在 $t_n \to t$，使得 $\Delta(K_-^n . A^n)_{t_n} \to \Delta(K_- . A)_t$，$\Delta K_{t_n}^n \to \Delta K_t$ 以及 $\Delta A_{t_n}^n \to \Delta A_t$，因此 $\Delta K_{t_n}^n \Delta A_{t_n}^n \to \Delta K_t \Delta A_t$，故 $K_-^n . A^n + \sum_{s\leq \cdot} \Delta K_s^n \Delta A_s^n \xrightarrow{\mathscr{L}} K_- . A + \sum_{s\leq \cdot} \Delta K_s \Delta A_s$，(c)得证.

(d) 取 $a > 0$ 使得 $\Delta K \neq a$，$P\text{-}a.s.$ 则 $\hat{K}^{n,a} \xrightarrow{s.k.} \hat{K}^a$ 及 $\sum_{s\leq \cdot} |\Delta \hat{K}_s^{n,a}| \xrightarrow{s.k.} \sum_{s\leq \cdot} |\Delta \hat{K}_s^a|$，因此$\{\hat{K}^{n,a}\}_{n\geq 1}$具有性质UT，从而容易证明

$$(\hat{K}^{n,a}, A^n, \hat{K}_-^{n,a} . A^n, A^n . \hat{K}^{n,a}) \xrightarrow{s.k.} (\hat{K}^a, A, \hat{K}_-^a . A, A_- . \hat{K}^a), \quad P\text{-}a.s.$$

由此可推得

$$\hat{K}^{n,a} A^n - \hat{K}_-^{n,a} . A^n - A_-^n . \hat{K}^{n,a} \xrightarrow{s.k.} \hat{K}^a A - \hat{K}_-^a . A - A_- . \hat{K}^a, \quad P\text{-}a.s.$$

利用 Itô 公式可推得

$$\sum_{s\leq \cdot} \Delta \hat{K}_s^{n,a} \Delta A_s^n \xrightarrow{s.k.} \sum_{s\leq \cdot} \Delta \hat{K}_s^a \Delta A_s, \quad P\text{-}a.s.$$

对任意 $t < \infty$，有

$$\sup_{s\leq t} \left| \sum_{u\leq s} \Delta K_u^n \Delta A_u^n - \sum_{u\leq s} \Delta \hat{K}_u^{n,a} \Delta A_u^n \right| \leq a \mathrm{Var}(A^n)_t.$$

故由引理4.4.9及上述所证结论可知

$$\lim_{a\downarrow 0} \sum_{s\leq \cdot} \Delta \hat{K}_s^a \Delta A_s = \sum_{s\leq \cdot} \Delta K_s \Delta A_s.$$

证毕.

4.4.15 注 在性质 4.4.14 的假设下，我们得不到 $\{\mathrm{Var}(A^n)\}_{n\geq 1}$ 的收敛性，甚至得不到 $\{\mathscr{L}(\mathrm{Var}(A^n))\}_{n\geq 1}$ 在 $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{R})$ 上关于 Skorokhod 拓扑的胎紧性.

例：假设

$$X_t^n=\begin{cases}\sum_{k=1}^{p}(-1)^k\frac{k}{n^2}, & \text{如果 } t\in\left[\frac{p}{n^2},\frac{p+1}{n^2}\right], \quad p=0,1,\cdots,n-1\\ 0, & \text{如果 } t>\frac{1}{n},\end{cases}$$

则 X^n 一致收敛于 0，即 $X^n\xrightarrow{\mathscr{L}}0$. 然而

$$\mathrm{Var}(X^n)_t=\begin{cases}\sum_{k=1}^{p}\frac{k}{n^2}, & \text{如果 } t\in\left[\frac{p}{n^2},\frac{p+1}{n^2}\right[\\ \frac{n-1}{2n}, & \text{如果 } t\geq\frac{1}{n}.\end{cases}$$

这表明对任意 $t>0$，$\mathrm{Var}(X^n)_t\to\frac{1}{2}I_{]0,\infty]}(t)$，即 Dirac 测度族 $\{\varepsilon_{\mathrm{Var}(X^n)}\}_{n\geq 1}$ 在 $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{R})$ 中不是胎紧，但是 $\{X^n\}_{n\geq 1}$ 具有 UT 性，这是因为对任意 $t>0$，$H^n\in\mathscr{H}_t^n$，$|H^n.X_t^n|\leqslant\mathrm{Var}(X^n)_t\leqslant\frac{1}{2}$.

在 $\{A^n\}_{n\geq 1}$ 均为增过程的情况下，不需要利用定理 4.4.11，而只要通过时间变换利用 Skorokhod 收敛性的定义，我们可以直接证明结论(b)、(c)、(d).

4.4.16 定理 假设 X^n 是定义在 $(\Omega^n,\mathscr{F}^n,\mathscr{F}_t^n,P^n)$ 上的实值半鞅，且 $\{X^n\}_{n\geq 1}$ 具有性质 UT，又设 K^n 是定义在 $(\Omega^n,\mathscr{F}^n,\mathscr{F}_t,P^n)$ 上且关于 σ-域流 $(\mathscr{F}_t^{(K^n,X^n)})_{t\geq 0}$（$(K^n,X^n)$ 的自然 σ-域流）是可料的右连左极实值过程. 如果 $(K^n,X^n)\xrightarrow{\mathscr{L}}(K,X)$，则

$$K^n.X^n\xrightarrow{\mathscr{L}}K.X.$$

证明 按照定理 4.4.11 和性质 4.4.14(c) 的证明，我们只要证明

$$\Delta K^n . X^n \xrightarrow{\mathscr{L}} \Delta K . X.$$

取 $a > 0$，和前面一样定义 $\hat{K}^{n,a}$ 和 $\hat{K}^a$. 不失一般性，设 X^n, K^n 定义在同一概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 上，和定理4.4.11的证明相同，我们有 $\hat{K}^{n,a} . X^n \xrightarrow{s.k.} \hat{K}^a . X, P\text{-}a.s.$

对任意的 $t < \infty$，有

$$\sup_{s \leqslant t} |\Delta K^n . X_s^n - \Delta \hat{K}^{n,a} . X_s^n| = \sup_{s \leqslant t} |(\Delta K^n I_{\{|\Delta K^n| \leqslant a\}}) . X_s^n|.$$

对任给的 $\varepsilon > 0$，由性质 UT 可得

$$\sup_n P\left\{\sup_{s \leqslant t} |\Delta K^n I_{\{|\Delta K^n| \leqslant a\}} . X_s^n| > \varepsilon\right\} \leqslant \varepsilon.$$

对于 (K, X) 我们有同样的性质，利用引理 4.4.9 可知命题成立. 定理得证.

4.4.17 定理 设 X^n 为 $(\Omega^n, \mathscr{F}^n, \mathscr{F}_t^n, P^n)$ 上的实值半鞅，K^n 为 $(\Omega^n, \mathscr{F}^n, \mathscr{F}_t^n, P^n)$ 上适应的右连左极实值过程，如果 $\{X^n\}_{n \geqslant 1}$ 具有性质 UT，且 $(K^n, X^n) \xrightarrow{\mathscr{L}} (K, X)$，则半鞅序列 $\{Y^n = K_-^n . X^n\}_{n \geqslant 1}$ 仍然具有性质UT.

证明 对任意的 $t > 0$ 及 $\varepsilon > 0$，由于 $\{K^n\}_{n \geqslant 1}$ 弱收敛，所以存在 $n_0 \in N$ 和 $p > 0$ 使得 $P^n((K^n)_t^* > p) \leqslant \varepsilon, \forall n \geqslant n_0$. 对于固定的 t，定义停时列 $T^{n,p} = \inf\{s > 0: |K_s^n| > p\}$. 则 $K_{\cdot \wedge T^{n,p}-}^n$ 为有界过程（其界为 p），且当 n 充分大时，$P^n(T^{n,p} < t) < \varepsilon$. 由引理4.4.3我们只要证明分布族 $\{\mathscr{L}(H^n . Y^n)_t^*, H^n \in \mathscr{H}_t^n, n \geqslant 1\}$ 胎紧，即证明对任意 $\varepsilon > 0$，存在常数 $q > 0$ 及 n_0，使得

$$P^n\{(H^n . Y^n)_t^* > q\} \leqslant 2\varepsilon, \quad \forall H^n \in \mathscr{H}_t^n, \quad n \geqslant n_0.$$

因为

$$\begin{aligned} & P^n\{(H^n . Y^n)_t^* > q\} \\ \leqslant & P^n\{((H^n . Y^n)^{T^{n,p}})_t^* > q\} + P^n(T^{n,p} < t) \\ \leqslant & P^n\{((H^n . Y^n)^{T^{n,p}})_t^* > q\} + \varepsilon, \end{aligned}$$

所以，不失一般性，我们可以假设 Y^n 在 $T^{n,p}$ 处停止，则 $|K^n_-|\leqslant p$. 但是又有

$$P^n\left\{\frac{1}{p}(H^n.Y^n)_t^*\geqslant q\right\}=P^n\{(H^n.Y^n)_t^*>pq\},$$

由 $q>0$ 的任意性，所以不妨假设 $|K^n_-|\leqslant 1$.

容易证明，按照在紧子集上一致收敛拓扑，依概率 $\mathscr{H}_1^n$ 在界为 1 的右连左极适应过程的集合中稠密（详细证明请参看 Protter[31](1990) 的第二章定理 10). 设 $K^{n,m}\in\mathscr{H}_1^n$ 按紧子集上一致收敛拓扑依概率收敛于 K^n，则

$$\begin{aligned}&P^n\{((H^nK^n).X^n)_t^*\geqslant 2pq\}\\\leqslant\ &P^n\{((H^nK^n).X^n-(H^nK^{n,m}).X^n)_t^*\geqslant pq\}\\&+P^n\{((H^nK^{n,m}).X^n)_t^*>pq\}.\end{aligned}$$

由 $K^{n,m}$ 的取法知对任意的 n，当 m 充分大时，上述不等式右端的第一项不超过 $\frac{\varepsilon}{2}$. 因为 $H^nK^{n,m}\in\mathscr{H}_1^n$，由 $\{X^n\}_{n\geqslant 1}$ 具有 UT 性知对于任意的 m，当 n 充分大时，上述不等式右端第二项也不超过 $\frac{\varepsilon}{2}$. 这就证明了 $\{Y^n\}_{n\geqslant 1}$ 具有 UT 性. 证毕.

半鞅序列具有 UT 性的证明是比较困难的，下面我们给出定理 4.4.11 的一个简化形式.

4.4.18 定理 设 X^n 和 K^n 分别为 $(\Omega^n,\mathscr{F}^n,\mathscr{F}_t^n,P^n)$ 上的半鞅和右连左极的适应过程，X^n 有分解 $X^n=M^n+A^n$，其 M^n 为局部鞅，A^n 为有限变差过程. 又假设

(Ⅰ) $\lim\limits_{b\to\infty}\sup\limits_n P^n(\{\mathrm{Var}(A^n)_t>b\})=0,\quad\forall\, t>0,$

(Ⅱ) $\sup\limits_n E^n\left(\sup\limits_{s\leqslant t}|\Delta M_s^n|\right)<\infty,\quad\forall\, t>0.$

如果 $(K^n,X^n)\xrightarrow{\mathscr{L}}(K,X)$，则 X 为半鞅，$\{X^n\}_{n\geqslant 1}$ 具有 UT 性，并且 $\int_0^{\cdot}K_{s-}^n\mathrm{d}X_s^n\xrightarrow{\mathscr{L}}\int_0^{\cdot}K_{s-}\mathrm{d}X_s$.

证明　由定理 4.4.11，我们只要证明$\{X^n\}_{n\geq 1}$具有 UT 性. 任取$H^n \in \mathscr{H}_1^n$，因为$\left(\int_0^\cdot H_s^n \mathrm{d}A_s^n\right)_t^* \leqslant \mathrm{Var}(A^n)_t$，条件（Ⅰ）表明分布族$\{\mathscr{L}(H^n.A^n)\}_{n\geq 1}$胎紧，又条件（Ⅰ）可推得$\{\mathscr{L}((A^n)_t^*)\}_{n\geq 1}$胎紧，从而由$(M^n)_t^* \leqslant (X^n)_t^* + (A^n)_t^*$及$X^n \xrightarrow{\mathscr{L}} X$我们可推得$\{\mathscr{L}((M^n)_t^*)\}_{n\geq 1}$胎紧.

下面我们来建立$\{\mathscr{L}((H^n.M^n))\}_{n\geq 1}$的胎紧性. 我们将利用 Davis 不等式：对任意的鞅M及停时T，存在与M和T无关的常数α和β，使得

$$E([M,M]_T^{1/2}) \leqslant \alpha E(M_T^*) \leqslant \beta E([M,M]_T^{1/2}).$$

对任意的$\varepsilon > 0$，由$\{\mathscr{L}((M^n)_t^*)\}_{n\geq 1}$胎紧知存在$K > 0$，使得

$$P^n\{T^{n,K} < t\} < \varepsilon,$$

其中$T^{n,K} = \inf\{\delta \geqslant 0 : |M_s^n| > K\} \wedge t$.

因为

$$(M^n)_{T^{n,K}}^* \leqslant K + \sup_{s\leqslant t}|\Delta M_s^n|,$$

所以

$$\sup_n E^n[(M^n)_{T^{n,K}}^*] \leqslant K + \sup_n E^n\left(\sup_{s\leqslant t}|\Delta M_s^n|\right) \leqslant C.$$

从而由 Davis 不等式，得

$$E^n([M^n,M^n]_{T^{n,K}}^{1/2}) \leqslant \alpha E^n[(M^n)_{T^{n,K}}^*] \leqslant C_1.$$

进一步又有

$$\begin{aligned}&E^n[(H^n.M^n)_{T^{n,K}}^*] \\ &\leqslant \beta E^n\left[\left(\int_0^{T^{n,K}} (H_s^n)^2 \mathrm{d}[M^n,M^n]_s\right)^{1/2}\right] \\ &\leqslant \beta E^n([M^n,M^n]_{T^{n,K}}^{1/2}) \leqslant C_2.\end{aligned}$$

所以由契贝谢夫不等式

$$P^n\left\{(H^n.M^n)_{T^{n,K}}^* > \frac{C_2}{\varepsilon}\right\} \leqslant \varepsilon.$$

然而$\sup_n P^n(T^{n,K} < t) < \varepsilon$,因此

$$\sup_n P^n\left\{(H^n . M^n)_t^* > \frac{C_2}{\varepsilon}\right\} \leqslant 2\varepsilon.$$

这表明$\{\mathscr{L}(H^n . M^n)\}_{n\geqslant 1}$胎紧,又$\{\mathscr{L}(H^n . A^n)\}_{n\geqslant 1}$也胎紧,故$\{\mathscr{L}(H^n . X^n)\}_{n\geqslant 1}$胎紧. 证毕.

注 如果X^n均定义在同一概率空间上,由证明过程知定理4.4.18中的条件(Ⅱ)可减弱为$\{|\Delta M_s^n|, s\leqslant t\}_{n\geqslant 1}(\forall\ t>0)$局部一致可积.

设X为半鞅,$h: \boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$是连续函数,并且满足$|h(x)|\leqslant 1$. 当$|x|\leqslant 1$时,$h(x)=x$;当$|x|\geqslant 2$时,$h(x)=0$. 定义

$$X(h)_t = X_t - \sum_{s\leqslant t}[\Delta X_s - h(\Delta X_s)], \quad t\geqslant 0,$$

因$X(h)$是跳有界的半鞅,因此是特殊半鞅,其典则分解为

$$X(h)_t = B(h)_t + M(h)_t, \quad t\geqslant 0, \tag{4.18}$$

其中$B(h)$为有限变差的可料过程,$M(h)$为局部平方可积鞅.

4.4.19 性质 设X^n为定义在$(\Omega^n, \mathscr{F}^n, \mathscr{F}_t^n, P^n)$上的半鞅,且$X^n \xrightarrow{\mathscr{L}} X$,则下列两条件等价:

(Ⅰ) $\{X^n\}_{n\geqslant 1}$具有性质UT,

(Ⅱ) 对任意的$t>0$,$\{\mathrm{Var}(B^n(h))_t\}_{n\geqslant 1}$胎紧,其中$B^n(h)$的定义和(4.18)相同.

证明 (Ⅰ)⇒(Ⅱ)假设$\{X^n\}_{n\geqslant 1}$具有性质UT,由推论4.4.13知$\{[X^n, X^n]\}_{n\geqslant 1}$胎紧,又$[M^n(h), M^n(h)]_t \leqslant [X^n, X^n]_t, \forall\ t\geqslant 0$,从而由Lenglart不等式有$\{(M^n(h))_t^*\}_{n\geqslant 1}$胎紧. 因此$\{\mathscr{L}(H^n . M^n(h)_t), H^n\in\mathscr{H}_t^n, n\geqslant 1\}$胎紧. 再由$\mathrm{Var}\left\{\sum_{s\leqslant\cdot}[\Delta X_s^n - h(\Delta X_s^n)]^2\right\}_t \leqslant [X^n, X^n]_t$知$\left\{\mathscr{L}\left(H^n . \left[\sum_{s\leqslant\cdot}(\Delta X_s^n - h(\Delta X_s^n))^2\right]_t\right), H^n\in\mathscr{H}_t^n, n\geqslant 1\right\}$胎紧,从而由$B^n(h)$的定义知$\{\mathscr{L}(H^n . B^n(h))_t$,

$H^n \in \mathscr{H}_1^n, n \geqslant 1\}$ 胎紧.

对任意的 $n \geqslant 1$,易知存在取值$\{-1,1\}$的可料过程 D^n(比如取 $D^n = \mathrm{sgn}B^n(h)$),使得$D^n.B^n(h) = \mathrm{Var}(B^n(h))$,取$\{H^{n,p}\}_{p\geqslant 1} \subset \mathscr{H}_1^n$.使得 D^n 是 $H^{n,p}$ 的极限,从而由$\{\mathscr{L}(H^n.B^n(h)_t), H^n \in \mathscr{H}_1^n, n \geqslant 1\}$ 的胎紧性可推得$\{\mathscr{L}(\mathrm{Var}(B^n(h))_t), n \geqslant 1\}$ 的胎紧性,即(Ⅱ)成立.

(Ⅱ)⇒(Ⅰ),假设(Ⅱ)成立.因为$X^n \xrightarrow{\mathscr{L}} X$,$h$ 为连续函数,所以 $X^n(h) \xrightarrow{\mathscr{L}} X(h)$ 及

$$V^n = \sum_{s\leqslant \cdot} |\Delta X_s^n - h(\Delta X_s^n)| \xrightarrow{\mathscr{L}} \sum_{s\leqslant \cdot} |\Delta X_s - h(\Delta X_s)|. \tag{4.19}$$

(参见[16]的推论 Ⅵ-2.8).因为$\{M^n(h)\}_{n\geqslant 1}$的跳幅一致有界,所以由定理4.4.18知$\{X^n(h)\}_{n\geqslant 1}$具有性质UT.(4.19)表明$\{V^n\}_{n\geqslant 1}$具有性质UT,从而由$\left|H^n.\left[\sum_{s\leqslant \cdot}[\Delta X_s^n - h(\Delta X_s^n)]\right]_t\right| \leqslant V_t^n$ 即知$\left\{\sum_{s\leqslant \cdot}[\Delta X_s^n - h(\Delta X_s^n)]\right\}_{n\geqslant 1}$ 具有性质 UT,故$\{X^n\}_{n\geqslant 1}$具有性质UT.证毕.

4.4.20 引理 设 Y^1 和 Y^2 为两个增过程,并且 $EY_\infty^1 < \infty$,$EY_\infty^2 \leqslant K$.如果对任意停时 σ 成立.

$$EY_\sigma^1 \leqslant E\int_0^\sigma Y_{t-}^1 \mathrm{d}Y_t^2 + \varepsilon,$$

则 $EY_\infty^1 \leqslant \varepsilon e^K$.

证明 见 Mackevicius[23].

三、随机微分方程的稳定性

设$(\Omega, \mathscr{F}, P)$为完备概率空间,$(\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$和$(\mathscr{F}_t^n)_{t\geqslant 0}$均为$(\Omega, \mathscr{F}, P)$上满足通常条件的 σ-域流,Z 和 Z^n 分别为$(\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$和

$(\mathscr{F}_t^n)_{t\geqslant 0}$ 适应的右连左极半鞅. 本小节我们主要研究如下形式的随机微分方程的稳定性:

$$X_t^n = H_t^n + \int_0^t f(X_{s-}^n)\mathrm{d}Z_s^n, \quad t \geqslant 0, \quad n \geqslant 1. \tag{4.20}$$

$$X_t = H_t + \int_0^t f(X_{s-})\mathrm{d}Z_s, \quad t \geqslant 0, \tag{4.21}$$

其中 f 为满足 Lipschitz 条件的实函数,即存在常数 $L > 0$,使得

$$|f(x) - f(y)| \leqslant L|x - y|, \quad \forall\, x, y \in \boldsymbol{R}.$$

4.4.21 定理 假设 H^n、H 分别为 $(\mathscr{F}_t^n)_{t\geqslant 0}$ 和 $(\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$ 适应的右连左极过程,X^n、X 分别为方程(4.20)和(4.21)的强解,并且假设 $\{Z^n\}_{n\geqslant 1}$ 具有性质 UT.

(Ⅰ)如果 $(H^n, Z^n) \xrightarrow{\mathscr{L}} (H, Z)$,则 $(X^n, H^n, Z^n) \xrightarrow{\mathscr{L}} (X, H, Z)$;

(Ⅱ)如果 $(H^n, Z^n) \xrightarrow{P} (H, Z)$,则 $(X^n, H^n, Z^n) \xrightarrow{P} (X, H, Z)$,

其中 $\xrightarrow{P}$ 表示按 Skorokhod 拓扑依概率收敛.

证明 a) 对任意固定的 $N > 0$,定义

$$T_N^n = \inf\{t : |X_t^n| + |H_t^n| \geqslant N, \text{或者 } |X_{t-}^n| + |H_{t-}^n| \geqslant N\},$$

$$T_N = \inf\{t : |X_t| + |H_t| \geqslant N, \text{或者 } |X_{t-}| + |H_{t-}| \geqslant N\},$$

则 T_N^n、T_N 分别为 $(\mathscr{F}_t^n)_{t\geqslant 0}$ 和 $(\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$ 停时. 如果记 $X^{n,N} = (X^n)^{T_N^n}$、$H^{n,N} = (H^n)^{T_N^n}$、$Z^{n,N} = (Z^n)^{T_N^n}$、$X^N = X^{T_N}$、$H^N = H^{T_N}$、$Z^N = Z^{T_N}$,则 $X^{n,N}$ 和 X^N 分别为随机微分方程

$$\begin{cases} X_t^{n,N} = H_t^{n,N} + \int_0^t f(X_{s-}^{n,N}) I_{\{|X_{s-}^{n,N}| + |H_{s-}^{n,N}| < N\}} \mathrm{d}Z_s^n, \\ X_t^N = H_t^N + \int_0^t f(X_{s-}^N) I_{\{|X_{s-}^N| + |H_{s-}^N| < N\}} \mathrm{d}Z_s \end{cases} \tag{4.22}$$

的强解,或等价地是随机微分方程

$$
\begin{cases}
X_t^{n,N} = H_t^{n,N} + \int_0^t f(X_{s-}^{n,N})\mathrm{d}Z_s^{n,N}, \\
X_t^N = H_t^N + \int_0^t f(X_{s-}^N)\mathrm{d}Z_s^N
\end{cases}
\tag{4.23}
$$

的强解.

b) 证明序列$\{(X^{n,N},H^n,Z^n)\}_{n\geqslant 1}$胎紧. 对任意的$i\geqslant 1$,定义

$\sigma_{n0}^i = 0$,

$\sigma_{n,k+1}^i = \min\{\sigma_{nk}^i + \delta_k^i, \inf\{t > \sigma_{nk}^i : |\Delta Z_t^n| + |\Delta H_t^n| > \delta^i\}\}$,

$k\geqslant 1, n\geqslant 1$,

$\sigma_0^i = 0$,

$\sigma_{k+1}^i = \min\{\sigma_k^i + \delta_k^i, \inf\{t > \sigma_k^i : |\Delta Z_t| + |\Delta H_t| > \delta^i\}\}, k\geqslant 1$,

其中$\{\delta^i\}_{i\geqslant 1}$和$\{\delta_k^i\}_{i,k\geqslant 1}$是常数序列,并且满足$\delta^i \downarrow 0, \frac{\delta^i}{2} \leqslant \delta_k^i \leqslant \delta^i$, $P(|\Delta Z_t| + |\Delta H_t| = \delta^i, t\geqslant 0) = 0, P(|\Delta Z_{\sigma_k^i+\delta_k^i}| + |\Delta H_{\sigma_k^i+\delta_k^i}| = 0) = 1, i\geqslant 1, k\geqslant 0$.

由推论2.3.3及连续性定理知$|Z^n| + |H^n| \xrightarrow{\mathscr{L}} |Z| + |H|$,从而由定理3.5.2知:如果以$|Z^n| + |H^n|$代替$X^n$,则定理3.5.2中的条件(5.1)～(5.5)成立.

对任意的$i\geqslant 1, n\geqslant 1$,定义

$$
\begin{cases}
{}^iH_t^n = H_{\sigma_{nk}^i}^n, & \sigma_{nk}^i \leqslant t < \sigma_{n,k+1}^i, \\
{}^iZ_t^n = Z_{\sigma_{nk}^i}^n, & \sigma_{nk}^i \leqslant t < \sigma_{n,k+1}^i,
\end{cases}
\quad (k\geqslant 0),
$$

$$
\begin{cases}
{}^iH_t = H_{\sigma_k^i}, & \sigma_k^i \leqslant t < \sigma_{k+1}^i, \\
{}^iZ_t = H_{\sigma_k^i}, & \sigma_k^i \leqslant t < \sigma_{k+1}^i.
\end{cases}
\quad (k\geqslant 0).
$$

再一次利用连续性定理可得

$$
(H^n, {}^iH^n) \xrightarrow{\mathscr{L}} (H, {}^iH), \quad (Z^n, {}^iZ^n) \xrightarrow{\mathscr{L}} (Z, {}^iZ).
$$

因此,由推论2.3.4知:对任意的$q\in \mathrm{Cont}H$,

$$
\sup_{t\leqslant q}|H_t^n - {}^iH_t^n| \xrightarrow{\mathscr{L}} \sup_{t\leqslant q}|H_t - {}^iH_t|.
$$

所以对任意的 $\varepsilon > 0, q \in \mathrm{Cont}H$,

$$\limsup_{n\to\infty} P\left(\sup_{t\leqslant q} |H_t^n - {}^iH_t^n| \geqslant \varepsilon\right)$$

$$\leqslant P\left(\sup_{t\leqslant q} |H_t - {}^iH_t| \geqslant \varepsilon\right).$$

容易证明

$$\sup_{t\leqslant q} |H_t - {}^iH_t| \leqslant \delta^i + 2w'_q(H, \delta^i)$$

及

$$\lim_{i\to\infty} \limsup_{n\to\infty} P\left(\sup_{t\leqslant q} |H_t^n - {}^iH_t^n| \geqslant \varepsilon\right) = 0, \quad \forall\ \varepsilon > 0, q \geqslant 0. \tag{4.24}$$

显然,同样的证明可得

$$\lim_{i\to\infty} \limsup_{n\to\infty} P\left(\sup_{t\leqslant q} |Z_t^n - {}^iZ_t^n| \geqslant \varepsilon\right) = 0, \quad \forall\ \varepsilon > 0, q \geqslant 0. \tag{4.25}$$

下面我们将证明过程序列 $\{X^{n,N}\}_{n\geqslant 1}$ 也具有性质:

$$\lim_{i\to\infty} \limsup_{n\to\infty} P\left(\sup_{t\leqslant q} |X_t^{n,N} - {}^iX_t^{n,N}| \geqslant \varepsilon\right) = 0, \quad \forall\ \varepsilon > 0, q \geqslant 0, \tag{4.26}$$

其中 ${}^iX_t^{n,N} = X_{\sigma_{nk}^i}^{n,N}, \sigma_{nk}^i \leqslant t < \sigma_{n,k+1}^i, n \geqslant 1, i \geqslant 1, k \geqslant 0$.

首先注意到当 $t \in [\sigma_{nk}^i, \sigma_{n,k+1}^i[$ 时,(4.22) 表明

$$\begin{aligned}
&(X_t^{n,N} - {}^iX_t^{n,N})^2 \\
&\leqslant 3(H_t^{n,N} - {}^iH_t^{n,N})^2 + 3\left(\int_{(\sigma_{nk}^i, t]} (f(X_{s-}^{n,N}) - f({}^iX_{s-}^{n,N})) \right. \\
&\qquad \left. \cdot I_{\{|X_s^{n,N}| + |H_{s-}^{n,N}| < N\}} \mathrm{d}Z_s^n \right)^2 \\
&\qquad + 3\left(\int_{(\sigma_{nk}^i, t]} f({}^iX_{s-}^{n,N}) I_{\{|X_{s-}^{n,N}| + |H_{s-}^{n,N}| < N\}} \mathrm{d}Z_s^n\right)^2.
\end{aligned} \tag{4.27}$$

如果我们利用

$$\int_{(\sigma_{nk}^i, t]} f({}^iX_{s-}^{n,N}) I_{\{|X_{s-}^{n,N}| + |H_{s-}^{n,N}| < N\}} \mathrm{d}Z_s^n = f(X_{\sigma_{nk}^i}^{n,N})(Z_t^{n,N} - Z_{\sigma_{nk}^i}^{n,N}),$$

$$t \in [\sigma_{nk}^i, \sigma_{n,k+1}^i[$$

及

$$Z_t^n - Z_{\sigma_{nk}^i}^n = Z^n(h)_t - Z^n(h)_{\sigma_{nk}^i}, \quad t \in [\sigma_{nk}^i, \sigma_{n,k+1}^i[$$

其中的 h 和性质 4.4.19 中的相同，则

$$\begin{aligned}
&(X_t^{n,N} - {}^iX_t^{n,N})^2 \\
&\leqslant 3(H_t^{n,N} - {}^iH_t^{n,N})^2 + 3\Big[\int_{(\sigma_{nk}^i, t]} (f(X_{s-}^{n,N}) - f({}^iX_{s-}^{n,N})) \\
&\quad \cdot I_{\{|X_{s-}^{n,N}| + |H_{s-}^{n,N}| < N\}} \mathrm{d}Z^n(h)_s\Big]^2 \\
&\quad + 3[f(X_{\sigma_{nk}^i}^{n,N}) I_{\{|X_{\sigma_{nk}^i}^{n,N}| < N\}} (Z_t^n - {}^iZ_t^n)]^2.
\end{aligned}$$

因此对于每个停时 σ_n，

$$\begin{aligned}
&\sup_{t<\sigma_n} (X_t^{n,N} - {}^iX_t^{n,N})^2 \\
&\leqslant 3 \sup_{t<\sigma_n} (H_t^{n,N} - {}^iH_t^{n,N})^2 + 12 \sup_{t<\sigma_n} \Big[\int_0^t (f(X_s^{n,N}) - f({}^iX_{s-}^{n,N})) \\
&\quad \cdot I_{\{|X_{s-}^{n,N}| - |H_{s-}^{n,N}| < N\}} \mathrm{d}Z^n(h)_s\Big]^2 \\
&\quad + 3[LN + |f(0)|]^2 \sup_{t<\sigma_n} (Z_t^n - {}^iZ_t^n)^2. \qquad (4.28)
\end{aligned}$$

对于固定的 $M > 0$，令

$$\begin{aligned}
\gamma_M^n = \inf\{t: \max\{[M^n(h)]_t, \langle M^n(h)\rangle_t, \mathrm{Var}B^n(h)_t, \\
|H_t^{n,N} - {}^iH_t^{n,N}|, |Z_t^n - {}^iZ_t^n|\} > M\}, \quad n \geqslant 1,
\end{aligned}$$

其中 $Z^n(h) = M^n(h) + B^n(h)$，则 γ_M^n 为 $(\mathscr{F}_t^n)_{t\geqslant 0}$ 停时. 因为我们所考虑的过程的跳一致有界，所以存在常数 $K > 0$ 使得上述过程在 γ_M^n 处的停止的界都不超过 K.

任意固定 $q > 0$，由性质 4.4.19 知 $\{\mathrm{Var}B^n(h)_q\}_{n\geqslant 1}$ 胎紧，另一方面，由连续性定理可推得 $Z^n(h) \xrightarrow{\mathscr{L}} Z(h)$，因此 $\{[Z^n(h)]_q^*\}_{n\geqslant 1}$ 胎紧. 由 $[M^n(h)]_q^* \leqslant [Z^n(h)]_q^* + \mathrm{Var}B^n(h)_q$ 知 $\{[M^n(h)]_q^*\}_{n\geqslant 1}$ 也胎紧.

对任意的 D、$G > 0$，由 Lenglart 不等式得

$$P([M^n(h)]_q \geqslant G) \leqslant \frac{1}{G} E\Big[\sup_{t \leqslant q} |M^n(h)_t|^2 \wedge (D+4)\Big] + P\Big(\sup_{t \leqslant q} |M^n(h)_t|^2 \geqslant D\Big),$$

$$P(\langle M^n(h)\rangle_q \geqslant G) \leqslant \frac{1}{G} E([M^n(h)]_q \wedge (D+4)) + P([M^n(h)]_q \geqslant D),$$

所以序列 $\{\langle M^n(h)\rangle_q\}_{n\geqslant 1}$ 及 $\{[M^n(h)]_q\}_{n\geqslant 1}$ 均为胎紧. 合并上述性质及(4.24)和(4.25)可得

$$\lim_{M\to\infty} \limsup_{n\to\infty} P(\gamma_M^n \leqslant q) = 0, \qquad \forall\, q > 0. \tag{4.29}$$

下面我们只考虑在 $\gamma_M^n \wedge q$ 处停止的过程，为了书写方便，我们仍用 $X^{n,N}, H^{n,N}, Z^{n,N}$ 分别代替 $X^{n,N}_{\cdot\wedge\gamma_M^n\wedge q}, H^{n,N}_{\cdot\wedge\gamma_M^n\wedge q}, Z^{n,N}_{\cdot\wedge\gamma_M^n\wedge q}$.

应用不等式(4.28)，我们有

$$E\sup_{t<\sigma_n}(X_t^{n,N} - {}^iX_t^{n,N})^2$$

$$\leqslant 3E\sup_{t<\sigma_n}(H_t^{n,N} - {}^iH_t^{n,N})^2$$

$$+ 24E\sup_{t<\sigma_n}\Big[\int_0^t (f(X_{s-}^{n,N}) - f({}^iX_{s-}^{n,N}))I_{\{|X_{s-}^{n,N}|+|H_{s-}^{n,N}|<N\}} \mathrm{d}B^n(h)_s\Big]^2$$

$$+ 24E\sup_{t<\sigma_n}\Big[\int_0^t (f(X_{s-}^{n,N}) - f({}^iX_{s-}^{n,N}))I_{\{|X_{s-}^{n,N}|+|H_{s-}^{n,N}|<N\}} \mathrm{d}M^n(h)_s\Big]^2$$

$$+ 3(LN + |f(0)|)^2 E\sup_{t<\sigma_n}(Z_t^n - {}^iZ_t^n)^2.$$

由 Doob 不等式得

$$E\sup_{t<\sigma_n}\Big[\int_0^t (f(X_{s-}^{n,N}) - f({}^iX_{s-}^{n,N}))I_{\{|X_{s-}^{n,N}|+|H_{s-}^{n,N}|<N\}} \mathrm{d}M^n(h)_s\Big]^2$$

$$\leqslant 4E\int_0^{\sigma_n} [f(X_{s-}^{n,N}) - f({}^iX_{s-}^{n,N})]^2 I_{\{|X_{s-}^{n,N}|+|H_{s-}^{n,N}|<N\}} \mathrm{d}([M^n(h)]_s + \langle M^n(h)\rangle_s).$$

因为 f 满足 Lipschitz 条件，所以我们有

$$E\sup_{t<\sigma_n}(X_t^{n,N} - {}^iX_t^{n,N})^2$$

$$\leqslant 24L^2 E\mathrm{Var}B^n(h)_{\sigma_n-}\int_0^{\sigma_n-}\sup_{u\leqslant s}(X_{u-}^{n,N}-{}^iX_{u-}^{n,N})^2\mathrm{d}\mathrm{Var}B^n(h)_s$$

$$+\ 96L^2 E\int_0^{\sigma_n-}\sup_{u\leqslant s}(X_{u-}^{n,N}-{}^iX_{u-}^{n,N})^2\mathrm{d}([M^n(h)]_s+\langle M^n(h)\rangle_s)$$

$$+\ \varepsilon_n^i,$$

其中 $\varepsilon_n^i = 3E\sup_{t<\sigma_n}(H_t^{n,N}-{}^iH_t^{n,N})^2 + 3(LN+|f(0)|)^2 E\sup_{t<\sigma_n}(Z_t^n - {}^iZ_t^n)^2$.

如果记

$$Y_t^1 = \sup_{s\leqslant t}(X_s^{n,N}-{}^iX_s^{n,N})^2,$$

$$Y_t^2 = 24L^2(M+2)\mathrm{Var}B^n(h)_t + 96L^2([M^n(h)]_t+\langle M^n(h)\rangle_t),$$

$$K_M = 24L^2(M+2)^2 + 96L^2(2M+32),$$

则由引理 4.4.20 我们有

$$E\sup_{t<T_M^n\wedge q}(X_t^{n,N}-{}^iX_t^{n,N})^2 \leqslant \varepsilon_n^i e^{K_M},\quad q\geqslant 0,\quad M\geqslant 0.$$

因为$\lim\limits_{i\to\infty}\limsup\limits_{n\to\infty}\varepsilon_n^i = 0$,所以由(4.29) 可推得(4.26) 成立.

由(4.22) 可得

$$(X^{n,N})_q^*$$

$$\leqslant (H^{n,N})_q^* + \sup_{t\leqslant q}\left|\int_0^t f(X_{s-}^{n,N})I_{\{|X_{s-}^{n,N}|+|H_s^{n,N}|<N\}}\mathrm{d}M^n(h)_s\right|$$

$$+\sup_{t\leqslant q}\left|\int_0^t f(X_{s-}^{n,N})I_{\{|X_{s-}^{n,N}|+|H_{s-}^{n,N}|<N\}}\mathrm{d}B^n(h)_s\right|$$

$$+\sup_{t\leqslant q}\left|\int_0^t f(X_{s-}^{n,N})I_{\{|X_{s-}^{n,N}|+|H_s^{n,N}|<N\}}\mathrm{d}(Z^n - Z^n(h))_s\right|.$$

用同样的方法可证得上面不等式右端前三项的胎紧. 因为

$$\sup_{t\leqslant q}\left|\int_0^t f(X_{s-}^{n,N})I_{\{|X_{s-}^{n,N}|+|H_{s-}^{n,N}|<N\}}\mathrm{d}(Z^n - Z^n(h))_s\right|$$

$$\leqslant (LN+|f(0)|)\mathrm{Var}(Z^n - Z^n(h))_q$$

及 $\mathrm{Var}(Z^n - Z^n(h)) \xrightarrow{\mathscr{L}} \mathrm{Var}(Z - Z(h))$, 所以上面不等式的最后一项也胎紧. 从而定理 3.5.2 中的条件(5.3) 成立. 用完全同样

的方法可证明 3.5.2 中的条件(5.4)成立. 故由定理 3.5.2 知 $\{X^{n,N}\}_{n\geqslant 1}$ 胎紧,由假设即知$\{(X^{n,N},H^n,Z^n)\}_{n\geqslant 1}$ 胎紧.

c) 取正数列$\{N_i\}_{i\geqslant 1}$,使得 $N_i\uparrow\infty$. 任取 N 的子序列$\{n'\}$,由$\{(X^{n,N_1},H^n,Z^n)\}_{n\geqslant 1}$ 的胎紧性知存在$\{n'\}$ 的子序列$\{n'_1\}$,使得

$$(X^{n'_1,N_1},H^{n'_1},Z^{n'_1})\xrightarrow{\mathscr{L}}(Y,\overline{H},\overline{Z}),$$

其中 $\mathscr{L}(\overline{H},\overline{Z})=\mathscr{L}(H,Z)$,从而由 Stroock 和 Varadhan[36] 的引理 11.1.2 知存在 $M,N_1-1<M\leqslant N_1$ 使得

$$\inf\{t:|\overline{H}_t|+|Y_t|>M \text{ 或 } |\overline{H}_{t-}|+|Y_{t-}|>M\}$$
$$=\inf\{t:|\overline{H}_t|+|Y_t|\geqslant M \text{ 或 } |\overline{H}_{t-}|+|Y_{t-}|\geqslant M\},P\text{-}a.s.$$

由连续性定理和推论 2.3.8 可推得

$$(X^{n'_1,M},H^{n'_1,M},U^{n'_1},Z^{n'_1})\xrightarrow{\mathscr{L}}(Y^M,\overline{H}^M,\overline{U},\overline{Z}),$$

其中

$$U_t^n=f(X_t^{n,M})I_{\{|X_t^{n,M}|+|H_t^{n,M}|<M\}},\quad\forall\, t\geqslant 0,$$
$$\overline{U}_t=f(Y_t^M)I_{\{|Y_t^M|+|\overline{H}_t^M|<M\}},\quad\forall\, t\geqslant 0.$$

过程 Y 和$\overline{H}$ 是在停时 T_M 处被停止,其中

$$T_M=\inf\{t:|\overline{H}_t|+|Y_t|\geqslant M \text{ 或 } |\overline{H}_{t-}|+|Y_{t-}|\geqslant M\}.$$

和定理 4.4.11 的证明方法相同,我们可得到

$$(X^{n'_1,M},H^{n'_1,M},U^{n'_1}_{-},Z^{n'_1})\xrightarrow{\mathscr{L}}(Y^M,\overline{H}^M,\overline{U}_{-},\overline{Z}).$$

因此,再一次利用连续性定理和推论 2.3.4 可得:对任意的 $q\in$ $\mathrm{Cont}Y^M\cap\mathrm{Cont}\,\overline{H}^M\cap\mathrm{Cont}\,\overline{Z}$,

$$\sup_{t\leqslant q}\left|X_t^{n'_1,M}-H_t^{n'_1,M}-\int_0^t f(X_{s-}^{n'_1,M})I_{\{|X_{s-}^{n'_1,M}|+|H_{s-}^{n'_1,M}|<M\}}\mathrm{d}Z_s^n\right|$$
$$\xrightarrow{\mathscr{L}}\sup_{t\leqslant q}\left|Y_t^M-\overline{H}_t^M-\int_0^t f(Y_{s-}^M)I_{\{|Y_{s-}^M|+|\overline{H}_{s-}^M|<M\}}\mathrm{d}\,\overline{Z}_s\right|,$$

所以有结论

$$Y^M=\overline{H}^M+\int_0^{\cdot} f(Y_{s-}^M)I_{\{|Y_{s-}^M|+|\overline{H}_{s-}^M|<M\}}\mathrm{d}\,\overline{Z}_s,$$

或等价地

$$Y^M = \overline{H}^M + \int_0^{\cdot} f(Y^M_{s-})\mathrm{d}\,\overline{Z}^M_s.$$

另一方面，设$\overline{X}$为随机微分方程

$$\overline{X} = \overline{H}^M + \int_0^{\cdot} f(\overline{X}_{s-})\mathrm{d}\,\overline{Z}$$

的强解. 容易计算$\overline{X}_t = \overline{Y}_t, t \leqslant T_M$，并且有结论

$$T_M = \inf\{t: |\overline{X}_t| + |\overline{H}_t| \geqslant M \text{ 或 } |\overline{X}_{t-}| + |\overline{H}_{t-}| \geqslant M\}$$

和 $Y^M = \overline{X}^M$.

因为 $\mathscr{L}(\overline{H},\overline{Z}) = \mathscr{L}(H,Z)$，所以我们可推得 $\mathscr{L}(\overline{X},\overline{H},\overline{Z}) = \mathscr{L}(X,H,Z)$ 及 $\mathscr{L}(\overline{X}^M,\overline{H},\overline{Z}) = \mathscr{L}(X^M,H,Z)$. 因此

$$(X^{n'_1,M},H^{n'_1},Z^{n'_1}) \xrightarrow{\mathscr{L}} (X^M,H,Z).$$

再由$\{(X^{n'_1,N_2},H^{n'_1},Z^{n'_1})\}_{n'_1\geqslant 1}$的胎紧性知存在$\{n'_1\}$的子序列$\{n'_2\}$，使得$(X^{n'_2,N_2},H^{n'_2},Z^{n'_2}) \xrightarrow{\mathscr{L}} (Y',H',Z')$，其中$\mathscr{L}(H',Z') = \mathscr{L}(H,Z)$. 用上述同样的方法可证存在$M'$，$M' > M$，$N_2 - 1 < M' \leqslant N_2$使得

$$(X^{n'_2,M'},H^{n'_2},Z^{n'_2}) \xrightarrow{\mathscr{L}} (X^{M'},H,Z).$$

如此进行下去，我们就得到可列多个子序列，利用对角线方法我们可以得到子序列$\{n''\}$和正数列$\{M_k\}_{k\geqslant 1}$，$M_k \uparrow \infty$使得

$$(X^{n'',M_k},H^{n''},Z^{n''}) \xrightarrow{\mathscr{L}} (X^{M_k},H,Z), \quad \forall\, k \geqslant 1. \tag{4.30}$$

最后，注意到

$$T^n_{M_k} = \inf\{t: |X^n_t| + |H^n_t| \geqslant M_k \text{ 或 } |X^n_{t-}| + |H^n_{t-}| \geqslant M_k\}.$$

为了完成证明，我们只要证

$$\lim_{k\to\infty}\limsup_{n\to\infty} P(T^n_{M_k} \leqslant q) = 0, \quad \forall\, q \geqslant 0. \tag{4.31}$$

取 $q \in \mathrm{Cont}X \cap \mathrm{Cont}H$，因为

$$\begin{aligned}&P(T^n_{M_k} \leqslant q)\\ &= P\Big(\sup_{t\leqslant q}(|X^n_t| + |H^n_t|) \geqslant M_k\Big)\end{aligned}$$

$$= P\left(\sup_{t\leq q}(|X_t^{n,M_{k+1}}| + |H_t^{n,M_{k+1}}|) \geq M_k\right),$$

所以，由 $|H^{n,M_{k+1}}| + |X^{n,M_{k+1}}| \xrightarrow{\mathscr{L}} |H^{M_{k+1}}| + |X^{M_{k+1}}|$ 我们可以推得

$$\limsup_{n\to\infty} P(T_{M_k}^n \leq q)$$

$$\leq P\left(\sup_{t\leq q}(|H_t^{M_{k+1}}| + |X_t^{M_{k+1}}|) \geq M_k\right)$$

$$= P\left(\sup_{t\leq q}(|H_t| + |X_t|) \geq M_k\right).$$

因此(4.31)成立，并且

$$\lim_{k\to\infty}\limsup_{n\to\infty} P\left(\sup_{t\leq q}|X_t^n - X_t^{n,M_k}| \geq \varepsilon\right) = 0, \quad \forall\, \varepsilon > 0, q \geq 0.$$

定理的第一部分得到证明.

d) 证明(Ⅱ)成立. 对于固定的 $B \in \mathscr{F}, P(B) > 0$，定义 $Q_B(A) = P(A|B), \forall\, A \in \mathscr{F}$；则显然有 $Q_B \ll P$，且$\dfrac{\mathrm{d}Q_B}{\mathrm{d}P} = \dfrac{I_B}{P(B)}$.

设$\{H,H^n,n\geq 1\}$和$\{Z,Z^n,n\geq 1\}$满足(Ⅰ)中的条件，则由性质 4.4.6 知$\{Z,Z^n,n\geq 1\}$仍是$(\Omega,\mathscr{F},Q_B)$上的半鞅序列，并且仍然具有性质 UT. 进一步地，对 Q_B-$a.s.\,\omega \in \Omega$，随机积分 $\int_0^{\cdot} f(X_{s-}^n)\mathrm{d}Z_s^n$ 关于 P 的计算和关于 Q_B 的计算相等，所以我们有

$$(H^n,Z^n) \xrightarrow{\mathscr{L}(Q_B)} (H,Z), \tag{4.32}$$

$$X_t^n = H_t^n + \int_0^t f(X_{s-}^n)\mathrm{d}Z_s^n, \quad \forall\, t \geq 0, \quad Q_B\text{-}a.s. \tag{4.33}$$

由(Ⅰ)的结论我们可得

$$(X^n,H^n,Z^n) \xrightarrow{\mathscr{L}(Q_B)} (X,H,Z).$$

因此对任意的连续有界函数 $\Phi: \boldsymbol{D}(\boldsymbol{R}^3) \to \boldsymbol{R}$，

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega \Phi(X^n,H^n,Z^n)\mathrm{d}Q_B = \int_\Omega \Phi(X,H,Z)\mathrm{d}Q_B, \tag{4.34}$$

或等价地，

$$\lim_{n\to\infty}\int_B \Phi(X^n,H^n,Z^n)\mathrm{d}P = \int_B \Phi(X,H,Z)\mathrm{d}P. \tag{4.35}$$

由 $B\in\mathscr{F}$，$P(B)>0$ 及 Φ 的任意性，容易证明

$$(X^n,H^n,Z^n)\xrightarrow{P}(X,H,Z).$$

定理证毕.

设 X 和 X^n 分别是下列随机微分方程的强解：

$$\begin{cases} X_t = H_t + \int_0^t f(X_{s-})\mathrm{d}M_s + \int_0^t g(X_{s-})\mathrm{d}B_s, \\ X_t^n = H_t^n + \int_0^t f(X_{s-}^n)\mathrm{d}M_s^n + \int_0^t g(X_{s-}^n)\mathrm{d}B_s^n, \end{cases} \tag{4.36}$$

其中 f 和 g 均满足 Lipschitz 条件，M 和 M^n 均为局部鞅，B 和 B^n 均为有界变差过程.

4.4.22 推论 假设 $\sup_n E(\Delta M^n)_t^* < \infty$，$\forall\, t>0$，且对任意 $t\geqslant 0$，$\{\mathrm{Var}B_t^n\}_{n\geqslant 1}$ 胎紧，则下述结论成立：

（Ⅰ）如果 $(H^n,M^n,B^n)\xrightarrow{\mathscr{L}}(H,M,B)$，则 $(X^n,H^n,M^n,B^n)\xrightarrow{\mathscr{L}}(X,H,M,B)$.

（Ⅱ）如果 $(H^n,M^n,B^n)\xrightarrow{P}(H,M,B)$，则 $(X^n,H^n,M^n,B^n)\xrightarrow{P}(X,H,M,B)$.

证明 由假设及定理 4.4.18 知 $\{M^n\}_{n\geqslant 1}$ 及 $\{B^n\}_{n\geqslant 1}$ 均具有性质 UT. 定义

$$\sigma_{n,0}^i = 0,\quad \sigma_0^i = 0,$$

$$\sigma_{n,k+1}^i = \min\{\sigma_{nk}^i + \delta_k^i, \inf\{t>\sigma_{nk}^i : |\Delta H_t^n| + |\Delta B_t^n| + |\Delta M_t^n| > \delta^i\}\},$$

$$\sigma_{k+1}^i = \min\{\sigma_k^i + \delta_k^i, \inf\{t>\sigma_k^i : |\Delta H_t| + |\Delta B_t| + |\Delta M_t| > \delta^i\}\},$$

$i\geqslant 1, k\geqslant 1, n\geqslant 1$，其中 $(\delta^i)_{i\geqslant 1}$ 及 $\{\delta_k^i\}_{i,k\geqslant 1}$ 为常数列，并且满足

$\delta^i \downarrow 0, \frac{\delta^i}{2} \leqslant \delta^i_k \leqslant \delta^i$ 及

$$P(|\Delta H_t| + |\Delta B_t| + |\Delta M_t| = \delta^i, t \geqslant 0) = 0, \quad \forall\, i \geqslant 1,$$
$$P(|\Delta H_{\sigma^i_k+\delta^i_k}| + |\Delta M_{\sigma^i_k+\delta^i_k}| + |\Delta B_{\sigma^i_k+\delta^i_k}| = 0) = 1.$$

使用定理 4.4.21 完全相同的方法可以证明此命题成立. 证毕.

现在我们考虑如下形式的随机微分方程:

$$\begin{cases} X = H + \int_0^{\cdot} f(X_{s-})\mathrm{d}Z_s + \int_0^{\cdot} g(X_{s-})\mathrm{d}[Z]_s, \\ X^n = H^n + \int_0^{\cdot} f(X^n_{s-})\mathrm{d}Z^n_s + \int_0^{\cdot} g(X^n_{s-})\mathrm{d}[Z^n]_s, \quad n \geqslant 1, \end{cases} \tag{4.37}$$

其中 f 和 g 均满足 Lipschitz 条件.

4.4.23 推论 假设 $\{Z, Z^n, n \geqslant 1\}$ 和 $\{H, H^n, n \geqslant 1\}$ 满足定理 4.4.21 中的条件. 如果 $\{X, X^n, n \geqslant 1\}$ 是方程(4.37) 的强解序列,则定理 4.4.21 中的(Ⅰ)和(Ⅱ)成立.

证明 因为 $\{Z^n\}_{n\geqslant 1}$ 具有 UT 性,所以由推论 4.4.13 知

$$(H^n, Z^n, [Z^n]) \xrightarrow{\mathscr{L}} (H, Z, [Z]).$$

用和推论 4.4.22 同样的方法可以证明结论正确. 证毕.

4.4.24 引理 设 Z^n 为 $(\mathscr{F}^n_t)_{t\geqslant 0}$ 半鞅,并且 $\{Z^n\}_{n\geqslant 1}$ 具有性质 UT 和胎紧性. 如果可料过程序列 $\{Y^{n,k}\}_{n,k\geqslant 1}$ 使得

$$\lim_{k\to\infty} \limsup_{n\to\infty} P\left(\sup_{t\leqslant q} |Y^{n,k}_t| \geqslant \varepsilon\right) = 0, \quad \forall\, \varepsilon > 0, q \geqslant 0, \tag{4.38}$$

则

$$\lim_{k\to\infty} \limsup_{n\to\infty} P\left(\sup_{t\leqslant q} \left|\int_0^t Y^{n,k}_s \mathrm{d}Z^n_s\right| \geqslant \varepsilon\right) = 0, \quad \forall\, \varepsilon > 0, q \geqslant 0.$$

证明 我们可以假设 $Z^n \xrightarrow{\mathscr{L}} Z$. 由定理 4.4.21 的证明知 $Z^n(h) \xrightarrow{\mathscr{L}} Z(h)$, $\mathrm{Var}(Z^n - Z^n(h)) \xrightarrow{\mathscr{L}} \mathrm{Var}(Z - Z(h))$,并且对任意 $q \geqslant 0$,序列 $\{\mathrm{Var} B^n(h)_q\}_{n\geqslant 1}$ 和 $\{\langle M^n(h)\rangle_q\}_{n\geqslant 1}$ 胎紧. 因为

$$
\begin{aligned}
&\sup_{t\le q}\left|\int_0^t Y_s^{n,k}\mathrm{d}Z_s^n\right| \\
\leqslant &\sup_{t\le q}\left|\int_0^t Y_s^{n,k}\mathrm{d}(Z^n - Z^n(h))_s\right| + \sup_{t\le q}\left|\int_0^t Y_s^{n,k}\mathrm{d}B^n(h)_s\right| \\
&+ \sup_{t\le q}\left|\int_0^t Y_s^{n,k}\mathrm{d}M^n(h)_s\right| \\
\leqslant &\sup_{t\le q}|Y_t^{n,k}|\operatorname{Var}(Z^n - Z^n(h))_q + \sup_{t\le q}|Y_t^{n,k}|\operatorname{Var}B^n(h)_q \\
&+ \sup_{t\le q}\left|\int_0^t Y_s^{n,k}\mathrm{d}M^n(h)_s\right|,
\end{aligned}
$$

由(4.38)我们只要证明

$$
\lim_{k\to\infty}\limsup_{n\to\infty}P\left(\sup_{t\le q}\left|\int_0^t Y_s^{n,k}\mathrm{d}M^n(h)_s\right| > \varepsilon\right) = 0, \forall\ \varepsilon > 0, q \geqslant 0.
$$

由 Lenglart 不等式得：对任意的 $G, D > 0$，

$$
\begin{aligned}
&P\left(\sup_{t\le q}\left|\int_0^t Y_s^{n,k}\mathrm{d}M^n(h)_s\right|^2 \geqslant G\right) \\
\leqslant &4G^{-1}E\left(\left(\int_0^q (Y_s^{n,k})^2\mathrm{d}\langle M^n(h)\rangle_s\right) \wedge D\right) \\
&+ P\left(\int_0^q (Y_s^{n,k})^2\mathrm{d}\langle M^n(h)\rangle_s \geqslant D\right).
\end{aligned}
$$

再由不等式$\int_0^q (Y_s^{n,k})^2\mathrm{d}\langle M^n(h)\rangle_s \leqslant \sup_{t\le q}|Y_t^{n,k}|^2\langle M^n(h)\rangle_q$ 就完成了此引理的证明.

4.4.25 定义 设$\{f, f^n, n \geqslant 1\}$为定义在 $\boldsymbol{R}_+ \times \boldsymbol{R}$ 上的实函数列，称$\{f, f^n, n \geqslant 1\}$满足条件$(L)$，如果下列条件成立：

(Ⅰ) 对任意的 $t \geqslant 0, f(t, \cdot)$ 和 $f^n(t, \cdot)$ 均满足 Lipschitz 条件；

(Ⅱ) 对任意的 $y \in \boldsymbol{R}, f(\cdot, y)$ 和 $f^n(\cdot, y)$ 均是右连左极；

(Ⅲ) 对任意的序列$\{\alpha, \alpha_n, n \geqslant 1\} \subset \boldsymbol{D}(\boldsymbol{R}), \alpha_n \to \alpha$，则按 $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{R}^2)$ 中的 Skorokhod 拓扑，$(\beta_n, \alpha_n) \to (\beta, \alpha)$，其中 $\beta(t) = f(t+, \alpha(t))$，$\beta_n(t) = f^n(t+, \alpha_n(t)), n \geqslant 1$.

4.4.26 推论 假设函数序列$\{f, f^n, n \geqslant 1\}$满足条件$(L)$.

如果 X 和 X^n 分别为下列随机微分方程的强解：

$$\begin{cases} X = H + \int_0^{\cdot} f(s, X_{s-}) \mathrm{d}Z, \\ X^n = H^n + \int_0^{\cdot} f^n(s, X^n_{s-}) \mathrm{d}Z^n_s, \end{cases} \tag{4.39}$$

则在 $\{Z^n\}_{n\geqslant 1}$ 具有性质UT的条件下，定理4.4.21中的(Ⅰ)和(Ⅱ)仍然成立.

证明　证明的方法和定理4.4.21的证法基本相同，只是在b)的证明中有所改变，现在回到估计式(4.27). 在此处我们只要证明：对任意的 $\epsilon > 0, q \geqslant 0$，

$$\lim_{i\to\infty} \limsup_{n\to\infty} P\Big(\max_k \sup_{\substack{\sigma^i_{nk} < t < \sigma^i_{n,k+1} \\ t\leqslant q}} \Big| \int_{(\sigma^i_{nk}, t]} f^n(s, {}^iX^{n,N}_{s-}) \cdot I_{\{|X^{n,N}_{s-}| + |H^{n,N}_{s-}| < N\}} \mathrm{d}Z^n_s \Big| \geqslant \epsilon \Big) = 0. \tag{4.40}$$

因为对 $\sigma^i_{nk} < t < \sigma^i_{n,k+1}, t \leqslant q$，

$$\begin{aligned} &\Big| \int_{(\sigma^i_{nk}, t]} f^n(s, {}^iX^{n,N}_{s-}) I_{\{|X^{n,N}_{s-}| + |H^{n,N}_{s-}| < N\}} \mathrm{d}Z^n_s \Big| \\ \leqslant &\Big| \int_{(\sigma^i_{n,k}, t]} f^n(\sigma^i_{nk}+, X^{n,N}_{\sigma^i_{nk}}) I_{\{|X^{n,N}_{s-}| + |H^{n,N}_{s-}| < N\}} \mathrm{d}Z^n_s \Big| \\ &+ \Big| \int_{(\sigma^i_{nk}, t]} [f^n(s, X^{n,N}_{\sigma^i_{nk}}) - f^n(\sigma^i_{nk}+, X^{n,N}_{\sigma^i_{nk}})] \mathrm{d}Z^n_s \Big| \\ \leqslant &(LN + \sup_{t\leqslant q} |f^n(t, 0)|) |Z^n_t - Z^n_{\sigma^i_{nk}}| \\ &+ 2 \sup_{t\leqslant q} \Big| \int_0^t Y^i_n(s) I_{\{|X^{n,N}_{s-}| + |H^{n,N+}_{s-}| < N\}} \mathrm{d}Z^n_s \Big| \end{aligned}$$

其中 $Y^i_n(s) = f^n(s, X^{n,N}_{\sigma^i_{nk}}) - f^n(\sigma^i_{nk}+, X^{n,N}_{\sigma^i_{nk}}), \sigma^i_{nk} < s \leqslant \sigma^i_{n,k+1}$，$n, i \geqslant 1, k \geqslant 0$，所以由(4.25)我们只要证明

$$\lim_{i\to\infty} \limsup_{n\to\infty} P\Big(\sup_{t\leqslant q} \Big| \int_0^t Y^i_n(s) I_{\{|X^{n,N}_{s-}| + |H^{n,N}_{s-}| < N\}} \mathrm{d}Z^n_s \Big| \geqslant \epsilon \Big) = 0, \quad \forall q > 0. \tag{4.41}$$

由按 Skorokhod 拓扑收敛的性质知，对任意的 (s_n, w_n)、(s, w)

$\in \boldsymbol{R}_+ \times \boldsymbol{R}, (s_n, w_n) \to (s, w), 0 < s_n - t_n < \delta_n, \delta_n \downarrow 0,$

$$f^n(s_n, w_n) - f^n(t_n+, w_n) \to 0.$$

因此

$$\lim_{\delta \downarrow 0} \limsup_{n \to \infty} \sup_{|w| \leqslant N} \sup_{\substack{|s-t| \leqslant \delta \\ 0 < t < s \leqslant q}} |f^n(s, w) - f^n(t+, w)| = 0,$$

$$\forall\, N \geqslant 1,\ q \geqslant 0.$$

从而有

$$\lim_{r \to \infty} \limsup_{n \to \infty} P\Big(\sup_{t \leqslant q} |Y_n^i(t) I_{(|X_t^{n,N}| + |H_t^{n,N}| < N)}| \geqslant \varepsilon \Big) = 0,$$

$$\forall\, \varepsilon > 0, q \geqslant 0.$$

故由引理 4.4.24 知(4.41) 成立,即(4.40) 成立. 推论得证.

一个非常重要的特殊情况是随机微分方程

$$X = 1 + \int_0^{\cdot} X_{s-} \mathrm{d}Z_s, \tag{4.42}$$

它定义了 Z 的指数半鞅 $X = \mathscr{E}(Z)$,其中

$$\mathscr{E}(Z)_t = \exp\Big\{ Z_t - \frac{1}{2}\langle Z^c \rangle_t \Big\} \prod_{0 < s \leqslant t} (1 + \Delta Z_s) e^{-\Delta Z_s},$$

Z^c 为半鞅 Z 的连续鞅部分.

对于半鞅 X,我们记 $\mathscr{E}^{(2)}(X)$ 为 $\mathscr{E}(X)$ 的指数半鞅,即 $\mathscr{E}^{(2)}(X) = \mathscr{E}(\mathscr{E}(X))$. 一般地,定义 $\mathscr{E}^{(n)}(X) = \mathscr{E}(\mathscr{E}^{(n-1)}(X))$,称之为 X 的 n 重指数半鞅,由定理 4.4.21 可得如下推论:

4.4.27 推论 设半鞅序列 $\{X^n\}_{n \geqslant 1}$ 具有性质 UT,并且 $X^n \xrightarrow{\mathscr{L}} X$,则对任意的 $k \geqslant 1$, $(X^n, \mathscr{E}^{(k)}(X^n)) \xrightarrow{\mathscr{L}} (X, \mathscr{E}^{(k)}(X))$.

下面我们给出定理 4.4.21 的一些应用.

在一致收敛意义下随机微分方程解的稳定性

4.4.28 定理 设 Z^n、Z 分别为 $(\mathscr{F}_t^n)_{t \geqslant 0}$ 及 $(\mathscr{F}_t)_{t \geqslant 0}$ 适应的右连左极半鞅, H^n、H 分别为适应的右连左极过程,又假设 $\{Z^n\}_{n \geqslant 1}$ 具有 UT 性. 如果 X^n、X 分别为方程(4.20) 和(4.21) 的解,并且

(Ⅰ) $\sup\limits_{t\leqslant q}|H_t^n - H_t| \xrightarrow{P} 0, \quad \forall\, q \geqslant 0,$

(Ⅱ) $\sup\limits_{t\leqslant q}|Z_t^n - Z_t| \xrightarrow{P} 0, \quad \forall\, q \geqslant 0,$

则

$$\sup_{t\leqslant q}|X_t^n - X_t| \xrightarrow{P} 0, \quad \forall\, q \geqslant 0.$$

证明　由假设条件(Ⅰ)和(Ⅱ)可知

$$(H^n, Z^n) \xrightarrow{P} (H, Z).$$

定理 4.4.21(Ⅱ)表明$(X^n, H^n, Z^n) \xrightarrow{P} (X, H, Z)$. 又注意到

$$\Delta X_t = \Delta H_t + f(X_{t-})\Delta Z_t, \quad \forall\, t \geqslant 0,$$

所以如果 $\Delta X_t(\omega) \neq 0$,则 $\Delta H_t(\omega) \neq 0$　或　$\Delta Z_t(\omega) \neq 0, t \geqslant 0$, $\omega \in \Omega$ 至少有一个成立. 通过抽取子序列并利用性质 2.3.5,我们即得命题成立. 证毕.

随机微分方程(4.21)解的逼近

设 X 是随机微分方程(4.21)的强解,如果 Z 是 Brown 运动,则解 X 可以用离散化随机微分方程的解一致逼近. 下面我们对半鞅来考虑同样的问题.

设 $T = \{T_n\}_{n\geqslant 1}, T_n = \{t_{nk}\}_{k\geqslant 0}, 0 = t_{n0} < t_{n1} < \cdots, \lim\limits_{k\to\infty} t_{nk} = \infty$ 是 $\boldsymbol{R}_+$ 的分割序列,并且满足

$$T_n \subset T_{n+1}, \quad \forall\, n \geqslant 1, \tag{4.43}$$

$$\max_{k\leqslant \gamma_n(t)} (t_{nk} - t_{n,k-1}) \downarrow 0, \quad \forall\, t \geqslant 0, \tag{4.44}$$

其中 $\gamma_n(t) = \max\{k : t_{nk} \leqslant t\}, t \geqslant 0$. 定义

$$\rho_t^n = \max\{t_{nk} : t_{nk} \leqslant t\}, \quad t \geqslant 0, \quad n \geqslant 1.$$

下面我们考虑 Z 和 H 的离散化序列$\{Z \circ \rho^n\}_{n\geqslant 1} = \{(Z_{\rho_t^n})_{t\geqslant 0}\}_{n\geqslant 1}$ 和 $\{H \circ \rho^n\}_{n\geqslant 1} = \{(H_{\rho_t^n})_{t\geqslant 0}\}_{n\geqslant 1}$,其中

$$Z \circ \rho_t^n = Z_{\rho_t^n} = Z_{t_{nk}}, t_{nk} \leqslant t < t_{n,k+1}, k \geqslant 0, n \geqslant 1, \tag{4.45}$$

$$H \circ \rho_t^n = H_{\rho_t^n} = H_{t_{nk}}, t_{nk} \leqslant t < t_{n,k+1}, k \geqslant 0, n \geqslant 1. \quad (4.46)$$

对每个 $n \geqslant 1$，$Z \circ \rho^n$ 和 $H \circ \rho^n$ 都是有限变差过程，因此它们都是半鞅. 所以离散化随机微分方程

$$X_t^n = H \circ \rho_t^n + \int_0^t f(X_{s-}^n) \mathrm{d}(Z \circ \rho^n)_s, \quad t \geqslant 0, n \geqslant 1 \quad (4.47)$$

有解 X^n，而由(4.45) 和(4.46) 可推得

$$X_0^n = 0,$$

$$X_{t_{nk}}^n = H_{t_{nk}}^n + \sum_{i=1}^k f(X_{t_{n,k-1}}^n)(Z_{t_{ni}}^n - Z_{t_{n,i-1}}^n), \quad (4.48)$$

$$X_t^n = X_{t_{nk}}^n, \ t_{nk} \leqslant t < t_{n,k+1}, \ k \geqslant 0.$$

4.4.29 定理 设 X 是随机微分方程(4.21) 的解，X^n 是方程(4.47) 的解，则我们有

(Ⅰ) $(X^n, H \circ \rho^n, Z \circ \rho^n) \xrightarrow{P} (X, H, Z)$,

(Ⅱ) $\sup\limits_{t \leqslant N} |X_t^n - X \circ \rho_t^n| \xrightarrow{P} 0, \quad \forall N \geqslant 0.$

证明 注意到对每个 $n \geqslant 1$，γ_n 和 ρ^n 均为 $\boldsymbol{R}_+$ 上的右连左极增函数以及 H 和 Z 为右连左极过程，按 Skorokhod 拓扑我们有

$$H \circ \rho^n \to H, \quad a.s. \quad (4.49)$$

$$Z \circ \rho^n \to Z, \quad a.s. \quad (4.50)$$

从而由推论 2.3.3 可知在 $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{R}^2)$ 上，按 Skorokhod 拓扑有下式成立：

$$(H \circ \rho^n, Z \circ \rho^n) \to (H, Z), \quad a.s. \quad (4.51)$$

如果记 $\Delta_k^n Z = Z_{t_{nk}} - Z_{n,k-1}, k \geqslant 1$，则我们有 $Z \circ \rho_t^n = \sum\limits_{k=1}^{\gamma_n(t)} \Delta_k^n Z$. 从而 $Z \circ \rho^n$ 在 $[0,t]$ 上的全变差为 $\mathrm{Var}(Z \circ \rho^n)_t = \sum\limits_{k=1}^{\gamma_n(t)} |\Delta_k^n Z|$. 因此

$$\mathrm{Var}(Z \circ \rho^n)_t \leqslant \sup_{s \leqslant t} |Z_s^c| + \sum_{s \leqslant t} |\Delta Z_s|. \quad (4.52)$$

这表明序列 $\{Z \circ \rho^n\}_{n \geqslant 1}$ 具有性质 UT. 故由定理 4.4.21(Ⅰ) 可推得

结论(Ⅰ)成立. 再由推论 2.3.3 我们有

$$(X^n, X \circ \rho^n) \to (X, X). \tag{4.53}$$

因此由推论 2.3.4 和(4.53)可推得结论(Ⅱ)成立. 证毕.

四、在金融理论中的应用

本节我们给出了随机微分方程的稳定性定理在金融理论中的应用，给出了由股票交易所得的财政收入过程弱收敛的条件.

虽然大部分的金融经济理论都是建立在连续时间的贸易上，但是人们广泛地认为在确定这些模型时，它们与离散时间贸易密切相关. 因此当贸易周期趋于 0 时，离散时间贸易就是连续时间贸易. 在第 n 个贸易周期内，假设 Z^n 是股票的随机价格，H^n 为贸易策略，Z_t^n 为时刻 t 时的股票价格，H_t^n 为时刻 t 时投资者所占有股票的股数，则相应的财政收入过程为 $X^n = \int_0^{\cdot} H_t^n \mathrm{d}Z_t^n$.

4.4.30 引理 设 $\{X, X^n, n \geqslant 1\}$ 为定义在同一概率空间上 $\boldsymbol{R}^d$- 值右连左极过程，X 连续，并且按一致收敛拓扑 $X^n \xrightarrow{\mathscr{L}} X$. 对任意的 $n \geqslant 1$，设停时列 $\{T_k^n\}_{k \leqslant n_k}$ 为 $[0, T]$ 的分割，并且满足 $\sup\limits_k |T_k^n - T_{k-1}^n| \to 0, n \to \infty$. 对 $\boldsymbol{R}^d \times [0, T]$ 上的实值连续函数 f，令 $H_t^n = f(X_{T_k^n}^n, T_k^n), T_k^n \leqslant t < T_{k+1}^n, H_t = f(X_t, t)$，则按 $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{R}^{d+1})$ 上的一致收敛拓扑，$(H^n, X^n) \xrightarrow{\mathscr{L}} (H, X)$.

证明 因为 X 连续，所以对任意 ω，$X(\omega)$ 有界，设为 $r(\omega)$. 由 X^n 一致收敛于 X 知存在 $N(\omega)$，使得当 $n \geqslant N(\omega)$ 时，

$$\sup_t |X_t^n(\omega) - X_t(\omega)| < 1,$$

这表明

$$\sup_{n \geqslant N(\omega)} \sup_t |X_t^n(\omega)| \leqslant r(\omega) + 1,$$

因此

$$\sup_n \sup_t |X_t^n(\omega)| \leqslant \max\{r(\omega) + 1, \sup_{n < N(\omega)} \sup_t |X_t^n(\omega)|\}.$$

所以对于每个 ω, $\{X^n(\omega)\}_{n\geq 1}$ 一致有界,不失一般性,我们可以假设,对任意的 $\varepsilon > 0$,存在 $\delta(\omega) > 0$ 使得当 $|(y,t) - (x,s)| < \delta(\omega)$ 时, $|f(y,t) - f(x,s)| < \varepsilon$.

对于 $T_k^n \leqslant t < T_{k-1}^n, \omega \in \Omega$,存在 $N(\omega) > 0$ 使得

$$|(X_{T_k^n}^n(\omega), T_k^n(\omega)) - (X_t(\omega), t)| \leqslant \delta(\omega),$$

从而可推得

$$|H_t^n(\omega) - H_t(\omega)| = |f(X_{T_k^n}^n(\omega), T_k^n(\omega)) - f(X_t(\omega), t)| < \varepsilon.$$

故有

$$\sup_t |(X_t^n, H_t^n) - (X_t, H_t)| \to 0, n \to \infty, a.s.$$

引理证毕.

下面我们利用随机微分方程的稳定性定理证明 Black-Scholes 选择价格公式.

在标准对称条件下,当当前库存价格为 x,连续复利率 $\gamma > 0$ 时,则在时刻 t 到期实行价格为 K 购买选择权的非限制套利价格为

$$C(t,x) = \Phi(h)x - Ke^{-\gamma t}\Phi(h - \sigma\sqrt{t}),$$

其中 Φ 是标准正态分布函数, $h = \left[\ln(\frac{x}{K}) + \gamma t + \frac{\sigma^2 t}{2}\right]/\sigma\sqrt{t}$.

从而可得库存价格过程 X 满足随机微分方程

$$X_t = x + \mu\int_0^t X_s \mathrm{d}s + \sigma\int_0^t X_s \mathrm{d}B_s, \tag{4.54}$$

其中 $x > 0, \mu, \gamma, \sigma \neq 0$ 是常数, B 为标准 Brown 运动.

对于固定的 $T > 0$,取停时列 $\{T_k^n\}$ 满足引理 4.4.30 中的条件,假设在第 n 个周期内,投资者仅在停时列 $\{T_k^n\}$ 处交易,贸易策略 θ^n 是取自平方可积的可料过程集合 Θ^n,使得 $\theta_t^n = \theta_{T_k^n}^n$, $t \in (T_{k-1}^n, T_k^n]$. 为了简单,取 $T_k^n = \frac{k}{n}$. 不失一般性,我们取 $r = 0$,

此时我们只考虑库存收益,而债券交易收益为 0.

现在考虑库存贸易策略 θ^n 为

$$\theta_t^n = C_x(T - T_k^n, X_{T_k^n}), \quad T_k^n < t < T_{k+1}^n, \tag{4.55}$$

θ_0^n 任意,其中 $C_x(t,x) = \frac{\partial}{\partial x}C(t,x)$. 对于时间 T 后到期的还本付息债券,我们使用自筹经费限制定义债券交易策略

$$\alpha_t^n = \alpha_0^n + \int_0^{T_k^n} \theta_t^n \mathrm{d}X_t - \theta_{T_k^n}^n X_{T_k^n} + \theta_0^n X_0, T_k^n < t < T_{k+1}^n \quad (4.$$

其中 $\alpha_0^n = C(T,X_0) - \theta_0^n X_0$, 则全部初始投资 $\alpha_0^n + \theta_0^n X_0$ 是 Black-Scholes 选择价格 $C(T,X_0)$,这个自筹经费策略 (α^n,θ^n) 在时刻 T 的全部盈利是 $C(0,X_0) + \int_0^T \theta_t^n \mathrm{d}X_t$.

4.4.31 性质 当 n 趋于 ∞ 时,自筹经费策略 (α^n,θ^n) 在时刻 T 的全部盈利依分布收敛于选择盈利 $(X_T - K)^+$,即

$$C(0,X_0) + \int_0^T \theta_t^n \mathrm{d}X_t \xrightarrow{\mathscr{L}} (X_T - K)^+.$$

证明 对于 $X^n = X, K_t^n = C_x(t,X_t), t \in [T_k^n, T_{k+1}^n)$,我们容易证明定理 4.4.18 中的条件全部成立. 因为 $X^n = X, n \geqslant 1$. 所以有 $A^n = A(n \geqslant 1)$,从而有 $\lim\limits_{b\to\infty} P(\mathrm{Var}(A)_t > b) = 0$. 即 4.4.18(1)成立. 又由 X 的连续性可推得 X 的所有分解 $X = M + A$ 中的局部鞅 M 及有限变差过程 A 均连续,从而由引理4.4.30 及定理 4.4.18 可推得

$$C(0,X_0) + \int_0^T \theta_t^n \mathrm{d}X_t \xrightarrow{\mathscr{L}} C(0,X_0) + \int_0^T \theta_t \mathrm{d}X_t.$$

由 Duffie[7] 的第 22 节知 $C(0,X_0) + \int_0^T \theta_t \mathrm{d}X_t = (X_T - K)^+, a.s.$ 命题得证.

4.4.32 性质 假设 $a: \boldsymbol{R} \times [0,T] \to \boldsymbol{R}, \sigma: \boldsymbol{R} \times [0,T] \to \boldsymbol{R}$ 和 $g: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ 的一阶、二阶导数都满足 Lipschitz 条件,并且 $\mathrm{d}X_t = a(t,X_t)\mathrm{d}t + \sigma(t,X_t)\mathrm{d}B_t$. 如果 $X^n = M^n + A^n$ 满足定理4.4.18 中

的两个条件，并且按一致拓扑 $X^n \xrightarrow{\mathscr{L}} X$，则存在离散时间的自筹资金策略 $\{\theta^n\}_{n\geqslant 1}$，使得

$$E[g(Y_T)] + \int_0^T \theta_s^n \mathrm{d}X_s^n \xrightarrow{\mathscr{L}} g(X_T),$$

其中 $Y_t = S_0 + \int_0^t \sigma(s,Y_s)dB_s, t \in [0,T]$. $g(X_T)$ 称之为到时间 T 时的最终盈利.

证明　令 $F(t,x) = E[g(X_T^{t,x})]$，其中 $X_s^{t,x} = x + \int_t^s \sigma(\tau,$ ·)，$t \leqslant s$，则同 Duffie[7] 的第 22 节的证明相同，我们可推出 F_x 是连续函数，并且 $\theta_t = F_x(t,X_t)$ 满足方程

$$E[g(Y_T)] + \int_0^T \theta_t \mathrm{d}X_t = g(X_T), \quad a.s.$$

对于贸易策略 $\theta_t^n = f(T_k^n, X_{T_k^n}), t \in (T_k^n, T_{k+1}^n]$，同性质 4.4.31 的证明类似可知命题成立. 证毕.

假设相对于方程(4.54)所确定的价格过程 X 的积累利润过程是一个带漂移的 Brown 运动 Y，

$$Y_t = \mu t + \sigma B_t, \tag{4.57}$$

即 $X = X_0\mathscr{E}(Y)$. 下面我们考虑积累利润过程序列 $\{Y^n\}_{n\geqslant 1}$，使得 $Y^n \xrightarrow{\mathscr{L}} Y$.

4.4.33　例子(Cox, Ross, Rubinstein)　双向利润

对于每个固定的 n，假设 $\{Y_k^n\}_{k\geqslant 1}$ 是独立同分布，Y_k^n 服从二项分布，并且 $\sqrt{n}E(Y_1^n) \to \mu$，$\sqrt{n}D(Y_1^n) \to \sigma^2$，其中 $D(Y_1^n)$ 为 Y_1^n 的方差. 令

$$Y_t^n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{[nt]} Y_k^n, \tag{4.58}$$

容易证明 $Y^n \xrightarrow{\mathscr{L}} Y$. 因为 $\{Y_k^n\}_{k\geqslant 1}$ 独立且期望有限，所以

$$M_t^n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{[nt]} [Y_k^n - E(Y_k^n)]$$

是鞅，因此 Y^n 有分解

$$Y_t^n = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{[nt]}[Y_k^n - E(Y_k^n)] + \frac{1}{\sqrt{n}}[nt]E(Y_1^n) = M_t^n + A_t^n.$$

显然 M^n 的跳一致有界，又由

$$\lim_{b\to\infty}\sup_n P(\mathrm{Var}(A^n)_t > b)$$

$$\leqslant \lim_{b\to\infty}\sup_n P(\sqrt{n}\,t\,|E(Y_1^n)| > b) = 0,$$

从而由定理 4.4.18 知 $\{Y^n\}_{n\geqslant 1}$ 具有性质 UT. 如果令 $X^n = X_0^n\mathscr{E}(Y^n)$，$X_0^n \xrightarrow{\mathscr{L}} X_0$，则由推论 4.4.26 知 $X^n \xrightarrow{\mathscr{L}} X$.

4.4.34 性质 假设 $X_0^n \xrightarrow{\mathscr{L}} X_0 > 0$，$\{Y^n\}_{n\geqslant 1}$ 具有定理 4.4.21 中 $\{Z^n\}_{n\geqslant 1}$ 的性质，并且 $Y^n \xrightarrow{\mathscr{L}} Y$，其中 Y 是 Black-Scholes 积累利润过程(4.57)，则 $X^n = X_0^n\mathscr{E}(Y^n) \xrightarrow{\mathscr{L}} X_0\mathscr{E}(Y) = X$，并且 $C(0,X_0^n) + \int_0^T \theta_t^n \mathrm{d}X_t^n \xrightarrow{\mathscr{L}} (X_T - K)^+$，其中离散时间库存贸易策略 θ^n 定义为

$$\theta_t^n = C_x(T_k^n, X_{T_k^n}^n), \quad t \in (T_k^n, T_{k+1}^n).$$

证明，因为 $C(0,X_0) + \int_0^T \theta_t \mathrm{d}X_t = (X_T - K)^+$，*a.s.*，利用引理 4.4.30 及定理 4.4.11 易证此命题成立.

下面我们给出满足性质 4.4.34 的例子.

4.4.35 例子 独立同分布利润

假设 $\{Y^n\}_{n\geqslant 1}$ 是由(4.58)定义的库存利润过程序列，其中

(Ⅰ) $\{Y_k^n\}_{n,k\geqslant 1}$ 一致有界，

(Ⅱ) 对于每个固定的 n，$\{Y_k^n\}_{k\geqslant 1}$ 独立同分布，

(Ⅲ) $\sqrt{n}E(Y_k^n) \to \mu$，$n \to \infty$，

(Ⅳ) $\sqrt{n}D(Y_k^n) \to \sigma^2$，$n \to \infty$，

则由 Donsker 定理可得 $Y^n \xrightarrow{\mathscr{L}} Y$，其中 Y 由(4.57)给出，又定理

4.4.21 中的条件满足，所以由性质 4.4.34 知

$$C(0,X_0^n)+\int_0^T\theta_t^n\mathrm{d}X_t^n\xrightarrow{\mathscr{L}}(X_T-K)^+.$$

4.4.36 例子 混合利润

假设$\{Y^n\}_{n\geqslant1}$是由(4.58)定义的积累利润过程序列，并且

(Ⅰ) $\{Y_k^n\}_{n\geqslant1,k\geqslant1}$ 是实值一致有界随机变量序列，并且对于每个 n，$\{Y_k^n\}_{k\geqslant1}$ 是平稳的；

(Ⅱ) 令 $\mathscr{F}_m^n=\sigma\{Y_k^n;k<m\}$，$\mathscr{G}_m^n=\sigma\{Y_k^n;k\geqslant m\}$，$\varphi_p^n(m)=\varphi_p^n(\mathscr{G}_{m+l}^n|\mathscr{F}_l^n)$，其中

$$\varphi_p^n(\mathscr{A}|\mathscr{B})=\sup_{A\in\mathscr{A}}\|P^n(A|\mathscr{B})-P^n(A)\|_{L^p},$$

对某 $\delta>0$，记 $p=\dfrac{2+\delta}{1+\delta}$，$\alpha=\dfrac{\delta}{1+\delta}$，假设对每个 $n\geqslant1$，

$$C_n=\sum_{m=1}^{\infty}[\varphi_p^n(m)]^{\alpha}<\infty;$$

(Ⅲ) $\sqrt{n}E^n(Y_1^n)\to\mu$，$\sup\limits_n\sqrt{n}C_n\|U_1^n\|_{L^{2+\delta}}<\infty$，其中 $U_k^n=Y_k^n-E^n(Y_k^n)$；

(Ⅳ) $\sigma_n^2=E^n[(U_1^n)^2]+2\sum\limits_{k=2}^{\infty}E^n(U_1^n,U_k^n)$ 有定义，且 $\sigma_n^2\to\sigma^2$，$n\to\infty$. 如果 Y^n 由(4.58)所定义，则 $Y^n\xrightarrow{\mathscr{L}}Y$（详细证明请参见 Ethier-Kurtz[10]P350-P353）.

令

$$M_l^n=\sum_{k=1}^{l}U_k^n+\sum_{m=1}^{\infty}E^n(U_{l+m}^n|\mathscr{F}_l^n),$$

由混合假设条件知上面右端的级数收敛（见 Ethier-Kurtz[10] P351）. 从而关于 σ-域流$(\mathscr{F}_l^n)_{l\geqslant1}$，$M_l^n$ 是一个跳有界的鞅，因此有分解式

$$Y_t^n=\frac{1}{\sqrt{n}}M_{[nt]}^n+A_t^n,$$

其中 $A_t^n = \frac{1}{\sqrt{n}} V_{[nt]}^n + \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{[nt]} E^n(Y_k^n), V_l^n = -\sum_{m=1}^{\infty} E^n(U_{l+m}^n \mid \mathscr{F}_l^n)$.

利用 Ethier-Kurtz[10]P351 的估计法我们可以得到

$$
\begin{aligned}
& E^n(\mathrm{Var}(V^n)_l) \\
\leqslant & E^n\left(\sum_{k=1}^{l} \left| \sum_{m=1}^{\infty} E^n(U_{k+m}^n \mid \mathscr{F}_k^n) \right| \right) \\
\leqslant & \sum_{k=1}^{l} \left(\sum_{m=1}^{\infty} \delta \varphi_p^{\delta/(1+\delta)}(m) \right) \| U_1^n \|_{L^{2+\delta}} \\
\leqslant & l\delta C_n \| U_1^n \|_{L^{2+\delta}}.
\end{aligned}
$$

因此由条件(Ⅲ)

$$
\begin{aligned}
& \lim_{b\to\infty} \sup_n P^n\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \mathrm{Var}(V^n)_{[nt]} > b \right) \\
\leqslant & \lim_{b\to\infty} \sup_n \frac{1}{b\sqrt{n}} E^n(\mathrm{Var}(V^n)_{[nt]}) \\
\leqslant & \lim_{b\to\infty} \sup_n \frac{16}{b} \sqrt{n}\, t C_n \| U_1^n \|_{L^{2+\delta}} = 0.
\end{aligned}
$$

所以定理 4.4.18 中的两个条件被满足. 从而由性质 4.4.34 可知

$C(0, X_0^n) + \int_0^T \theta_t^n \mathrm{d}X_t^n \xrightarrow{\mathscr{L}} (X_T - K)^+$.

5

随机测度序列的弱收敛

本章主要是利用鞅方法研究整值随机测度序列的弱收敛，主要取材于[13,21,46].

5.1 整值随机测度序列的弱收敛

5.1.1 定义 整值随机测度 μ 称为 Poisson 测度，如果

（Ⅰ）μ 为随机连续，即对任意的 $t>0$，$P(\mu(\{t\}\times E)=0)=1$；

（Ⅱ）$(\boldsymbol{R}_+\times \boldsymbol{E},\mathscr{B}_+\times\mathscr{E})$ 上 σ- 有限测度 $m=E\mu$ 为 μ 的可料对偶投影；

（Ⅲ）如果 $B_i\subset(s,\infty)\times \boldsymbol{E}$，$i=1,2,\cdots,n$ 两两互不相交，则 $\mathscr{F}_s$，$\mu(B_1)$，$\cdots$，$\mu(B_n)$ 相互独立；

（Ⅳ）对任意的 $B\in \mathrm{B}\times\mathscr{E}$，$\mu(B)$ 服从 *Poisson* 分布.

设 μ 为整值随机测度，$\nu=\mu^p$，记

$$\Phi_\mu^1=\left\{f\in\widetilde{\mathscr{P}}:\forall\, t>0, E\int_0^t\int_E|f(s,x)|\nu(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)<\infty\right\}.$$

$$\Phi_\mu^2 = \left\{ f \in \widetilde{\mathscr{P}}: \forall\ t > 0, E\int_0^t\int_E |f(s,x)|^2 \upsilon(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x) < \infty \right\},$$

$$\Phi_{\mu,loc}^2 = \left\{ f \in \widetilde{\mathscr{P}}, \text{存在一列停时} T_n \uparrow \infty, \text{使得} fI_{[0,T_n]} \in \Phi_\mu^2 \right\}.$$

设 μ 为随机测度，$\upsilon = \mu^p$，记 $\widetilde{\mu} = \mu - \upsilon$.

对于 $f \in \Phi_\mu^1$，我们有

$$E\left[\int_0^t\int_E |f(s,x)|\mu(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)\right]$$

$$= E\left[\int_0^t\int_E |f(s,x)|\upsilon(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)\right].$$

以后我们记

$$\int_0^t\int_E f(s,x)\ \widetilde{\mu}\ (\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)$$

$$= \int_0^t\int_E f(s,x)\mu(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x) - \int_0^t\int_E f(s,x)\upsilon(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x).$$

如果 $f \in \Phi_\mu^1 \cap \Phi_\mu^2$，则 $\left\{\int_0^t\int_E f(s,x)\ \widetilde{\mu}\ (\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)\right\}_{t\geqslant 0}$ 是平方可积鞅，并且有

$$\left\langle\int_0^\cdot\int_E f(s,x)\ \widetilde{\mu}\ (\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)\right\rangle_t$$

$$= \int_0^t\int_E f^2(s,x)\upsilon(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x) - \sum_{s\leqslant t}\left\{\int_E f(s,x)\upsilon(\{s\}\times \mathrm{d}x)\right\}^2.$$

取 $\{U_n\}_{n\geqslant 1}$ 为 $\boldsymbol{E}$ 的单调上升的 Borel 集列，$\bigcup_{n=1}^\infty U_n = \boldsymbol{E}$，停时列 $T_k^n \uparrow \infty, a.s., k \uparrow \infty$，使得

$$E[\mu(0,t \wedge T_k^n] \times U_n)] < \infty.$$

对于 $f \in \Phi_\mu^2$，令

$$f_k^n(\omega,s,x) = I_{(-n,n)}(f(\omega,s,x))I_{U_n}(x)I_{[0,T_k^n]}(s)f(\omega,s,x).$$

容易证明 $f_k^n \in \Phi_\mu^1 \cap \Phi_\mu^2$，并且

$$E\left[\int_0^t\int_E |f_k^n(s,x) - f_{k'}^{n'}(s,x)|^2\upsilon(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)\right] \to 0,\quad k,k' \to \infty,$$

$n, n' \to \infty$.

因为

$$E\left[\left\{\int_0^t\int_E f_k^n(s,x)\,\widetilde{\mu}\,(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x) - \int_0^t\int_E f_k^{n'}(s,x)\,\widetilde{\mu}\,(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)\right\}^2\right]$$

$$\leqslant E\left[\int_0^t\int_E |f_k^n(s,x) - f_k^{n'}(s,x)|^2 \nu(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)\right].$$

所以存在一个平方可积鞅 M，使得

$$E\left[\left\{M_t - \int_0^t\int_E f_k^n(s,x)\,\widetilde{\mu}\,(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)\right\}^2\right] \to 0, \quad k \to 0, n \to \infty.$$

容易证明 M 是由 f 唯一决定的，而不依赖 U_n 和 T_k^n 的选取，我们记 $M = \int_0^{\cdot}\int_E f(s,x)\,\widetilde{\mu}\,(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)$. 如果 $f \in \Phi^2_{\mu,loc}$, 则 $\int_0^{\cdot}\int_E f(s,x) \cdot \widetilde{\mu}\,(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)$ 被定义为唯一的局部平方可积鞅 M，使得

$$M_{t\wedge T_n} = \int_0^t\int_E I_{[\![0,T_n]\!]}(s) f(s,x)\,\widetilde{\mu}\,(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x), \quad n \geqslant 1,$$

其中 $\{T_n\}_{n\geqslant 1}$ 是 $\Phi^2_{\mu,loc}$ 中定义的停时列.

对于 $f, g \in \Phi^2_{\mu,loc}$，成立下述关系式

$$\left\langle \int_0^{\cdot}\int_E f(s,x)\,\widetilde{\mu}\,(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x), \int_0^{\cdot}\int_E g(s,x)\,\widetilde{\mu}\,(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)\right\rangle_t$$

$$= \int_0^t\int_E f(s,x)g(s,x)\nu(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x) - \sum_{s\leqslant t}\left\{\int_E f(s,x)\nu(\{s\}\times \mathrm{d}x)\right\}\left\{\int_E g(s,x)\nu(\{s\}\times \mathrm{d}x)\right\}. \tag{1.1}$$

本节及以后各节中，我们所讨论的随机测度均满足条件：对任意的 $\omega \in \Omega$, $\mu(\omega,\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)$ 为 $\mathscr{B}_+ \times \mathscr{E}$ 上的 Radon 测度.

5.1.2 定义 设 $\{\mu_n\}_{n\geqslant 1}$ 为一列随机测度，称 μ_n 依分布弱收敛于随机测度 μ，如果对任意的 $f \in C_K(\boldsymbol{R}_+ \times \boldsymbol{E})$，随机变量序列 $\left\{\int_0^\infty\int_E f(s,x)\mu_n(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)\right\}_{n\geqslant 1}$ 依分布收敛于 $\int_0^\infty\int_E f(s,x)\,\mu\,(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)$,

记为 $\mu_n \xrightarrow{\mathscr{L}} \mu$.

注 $\mu_n \xrightarrow{\mathscr{L}} \mu$ 等价于对任意的整数 k 以及 $\boldsymbol{R}_+ \times \boldsymbol{E}$ 的任意含于紧集内满足 $P(\mu(\partial(A_i)) = 0) = 1, i = 1,2,\cdots,k$ 的 Borel 集 $A_1, A_2,\cdots,A_k$，都有

$$(\mu_n(A_1),\cdots,\mu_n(A_k)) \xrightarrow{\mathscr{L}} (\mu(A_1),\cdots,\mu(A_k)),$$

其中 $\partial(A)$ 是 A 的边界点集.

5.1.3 引理 设 M 为局部平方可积鞅，且 $\langle M\rangle_T \leqslant C_1$ 和 $\sup\limits_{0\leqslant t\leqslant T}|\Delta M_t| \leqslant C_2$，则对于 $0 < \lambda < 1/[4(C_1^{1/2} + C_2)]$，

$$E\left(\exp\left\{\lambda \sup_{0\leqslant t\leqslant T}|M_t|\right\}\right) \leqslant \frac{1}{1 - 4\lambda(C_1^{1/2} + C_2)}.$$

证明 任取停时 $0 \leqslant \tau \leqslant \sigma$，有

$$\begin{aligned}
&E[|M_{t\wedge\sigma} - M_{t\wedge\tau-}||\mathscr{F}_{t\wedge\tau}] \\
&\leqslant |\Delta M_{t\wedge\tau}| + E[|M_{t\wedge\sigma} - M_{t\wedge\tau}||\mathscr{F}_{t\wedge\tau}] \\
&\leqslant C_2 + E[(M_{t\wedge\sigma} - M_{t\wedge\tau})^2|\mathscr{F}_{t\wedge\tau}]^{1/2} \\
&\leqslant C_2 + C_1^{1/2}
\end{aligned}$$

从而由 Dellacherie 和 Meyer[5] 的定理 109 知命题成立. 证毕.

5.1.4 性质 假设 $\{M^n\}_{n\geqslant 1}$ 为局部平方可积鞅序列，并且 $\langle M^n\rangle \xrightarrow{\mathscr{L}} A$，其中 A 为连续的单调增过程. 如果 $|\Delta M^n| \leqslant C, \forall n \geqslant 1$，并且 $M^n \xrightarrow{\mathscr{L}} M$，则 M 关于其自然 σ-域流是局部平方可积鞅.

证明 因为 $|\Delta M^n| \leqslant C$，所以由性质 2.3.2 可推得 $|\Delta M| \leqslant C, P\text{-}a.s.$ 对任意的 $k > 0$，令

$$T = \inf\{t \geqslant 0: A_t \geqslant k\},$$

则 T 为停时，并且 $A_T \leqslant k$（因为 A 连续）. 对任意的 $n \geqslant 1$，定义

$$S_n = \inf\{t \geqslant 0: \langle M^n\rangle_t > k + 1\} \wedge T,$$

则 S_n 也是停时. 记 $\overline{M}^n = (M^n)^{S_n}$，因为

$$P(\{\overline{M}^n \neq (M^n)^T\}) \leqslant P(\{S_n < T\})$$

$$\leqslant P(\{\langle M^n\rangle_T \geqslant A_T + 1\}),$$

又 $\langle M^n\rangle \xrightarrow{\mathscr{L}} A$, A 为连续增过程以及 $A_T \leqslant k$，所以必有

$$\lim_{n\to\infty} P(\{\overline{M}^n \neq (M^n)^T\}) = 0,$$

从而 M^T 也是 $\overline{M}^n$ 的弱极限. 由 $\overline{M}^n$ 的定义有

$$\begin{aligned}\langle \overline{M}^n\rangle_\infty = \langle M^n\rangle_{S_n} &\leqslant \langle M^n\rangle_{S_n-} + (\Delta M^n_{S_n})^2 \\ &\leqslant A_T + 1 + C^2 \leqslant k + 1 + C^2,\end{aligned}$$

又 $|\Delta \overline{M}^n| \leqslant C$，从而由引理 5.1.4 有

$$\sup_n E|\overline{M}^n_t|^4 < \infty, \qquad \forall\, t \geqslant 0. \tag{1.2}$$

对任意的 $s < t$ 及正整数 d，设 $0 \leqslant t_1 < \cdots < t_d \leqslant s < t$，$f$ 为 $\boldsymbol{R}^d$ 上的有界连续函数. 因为 $\overline{M}^n$ 为鞅，所以有

$$E[(\overline{M}^n_t - \overline{M}^n_s) f(\overline{M}^n_{t_1}, \cdots, \overline{M}^n_{t_d})] = 0. \tag{1.3}$$

令 $D = \{t \geqslant 0 ; P(\{M^T_t \neq M^T_{t-}\}) = 0\}$，则 D 为 $\boldsymbol{R}_+$ 的稠密子集. 如果 $\{t_1, t_2, \cdots, t_d, s, t\} \subset D$，由(1.2)及连续性定理，在(1.3)中令 $n \to \infty$ 取极限得

$$E[(M^T_t - M^T_s) f(M^T_{t_1}, \cdots, M^T_{t_d})] = 0. \tag{1.4}$$

由 D 的稠密性知(1.4)对于任意的 $0 \leqslant t_1 < t_2 < \cdots < t_d \leqslant s < t$ 成立，再由 d 及 f 的任意性即得 M^T 为鞅，从而 M 为局部鞅，又 $|\Delta M| \leqslant C$，所以 M 为局部平方可积鞅. 证毕.

5.1.5 引理 设 $\{\mu_n\}_{n\geqslant 1}$ 为一列整值随机测度，$\upsilon_n = \mu_n^p$，υ 为随机连续的可料随机测度. 如果

$$f.\upsilon_n \xrightarrow{\mathscr{L}} f.\upsilon, \quad \forall\, f \in C_K(\boldsymbol{R}_+ \times \boldsymbol{E}),$$

则对任意的 $f \in C_K(\boldsymbol{R}_+ \times \boldsymbol{E})$，序列 $\{f.\mu_n\}_{n\geqslant 1}$ 和 $\{f.(\mu_n - \upsilon_n)\}_{n\geqslant 1}$ 在 $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{R})$ 中胎紧.

证明 任取 $f \in C_K(\boldsymbol{R} \times \boldsymbol{E})$，令

$$X^n = f.\mu_n, \qquad Y^n = f.(\mu_n - \upsilon_n).$$

因为 υ 为随机连续测度，所以 $f.\upsilon$ 为连续的随机过程，由假设知

$\{f.\upsilon_n\}_{n\geq 1}$是连续胎紧. 由 $f\in C_K(\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{E})$ 及 μ_n 为整值随机测度知 $|\Delta Y^n|\leqslant 2\sup_{x\in\boldsymbol{R}_+\times\boldsymbol{E}}|f(x)|$，从而 Y^n 为局部平方可积鞅. 记 $A^n=|f|.\upsilon_n$，则

$$\sum_{s\leqslant\cdot}\left[\int_E f(s,x)\upsilon_n(\{s\}\times\mathrm{d}x)\right]^2$$
$$\leqslant\sup_{s\leqslant\cdot}\int_E|f(s,x)|\upsilon_n(\{s\}\times\mathrm{d}x)\int_0^\cdot\int_E|f(s,x)|\upsilon_n(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)$$
$$=\left[\sup_{s\leqslant\cdot}(\Delta A_s^n)\right]A^n.$$

由假设条件知 $A^n\xrightarrow{\mathscr{L}}|f|.\upsilon$，从而由著名的 Skorokhod 定理可设 $A^n\to|f|.\upsilon$ 按 Skorokhod 拓扑几乎处处成立. 但是 $|f|.\upsilon$ 连续，从而对任意的 $t>0$，$\left[\sup_{s\leqslant t}(\Delta A_s^n)\right]A_t^n\to 0$，$P$-$a.s.$，即

$$\sum_{s\leqslant t}\left[\int_E f(s,x)\upsilon_n(\{s\}\times\mathrm{d}x)\right]^2\xrightarrow{P}0,\quad\forall\, t>0.$$

故由(1.1) 及假设条件得

$$\langle Y^n\rangle=f^2\cdot\upsilon_n-\sum_{s\leqslant\cdot}\left[\int_E f(s,x)\upsilon_n(\{s\}\times\mathrm{d}x)\right]^2$$
$$\xrightarrow{\mathscr{L}}f^2.\upsilon.$$

由定理 3.4.3 知$\{Y^n\}_{n\geq 1}$胎紧. 又 $X^n=Y^n+f.\upsilon_n$ 及$\{f.\upsilon_n\}_{n\geq 1}$连续胎紧知$\{X^n\}_{n\geq 1}$胎紧. 证毕.

5.1.6 定理 设$\{\mu_n\}_{n\geq 1}$为一列整值随机测度，$\upsilon_n=\mu_n^p$，υ为随机连续的可料随机测度，如果对任意的 $f\in C_K(\boldsymbol{R}_+\times\boldsymbol{E})$，$f.\upsilon_n\xrightarrow{\mathscr{L}}f.\upsilon$，则存在整值随机测度$\mu$，使得$\mu_n\xrightarrow{\mathscr{L}}\mu$，并且$\mu^p=\upsilon$.

证明 对任意的 $f\in C_K(\boldsymbol{R}_+\times\boldsymbol{E})$，定义 X^n 与 Y^n 和引理5.1.5 的证明中相同，引理5.1.5 表明$\{X^n\}_{n\geq 1}$胎紧. 从而随机变量序列$\left\{\int_0^\infty\int_E f(s,x)\mu_n(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)\right\}_{n\geq 1}$胎紧，由 f 的任意性知$\{\mu_n\}_{n\geq 1}$胎紧. 设 μ 为$\{\mu_n\}_{n\geq 1}$的任一弱极限点，则 μ 为整值随机测度. 设 μ_{n_k}

$\xrightarrow{\mathscr{L}} \mu$，则由假设条件对任意的 $f \in C_K(\boldsymbol{R} \times \boldsymbol{E})$，$f.\mu_{n_k} \xrightarrow{\mathscr{L}} f.\upsilon$，$f.\upsilon_{n_k} \xrightarrow{\mathscr{L}} f.\upsilon$. 由 $\{f.\upsilon_{n_k}\}_{k\geqslant 1}$ 连续胎紧可推得 $\{Y^{n_k}\}_{k\geqslant 1}$ 及 $\{(f.\mu_{n_k}, f.\upsilon_{n_k})\}_{k\geqslant 1}$ 胎紧. 不妨假设 $Y^{n_k} \xrightarrow{\mathscr{L}} Y$，由上述所证得 $Y = f.(\mu - \upsilon)$. 又由引理 5.1.5 的证明知

$$\langle Y^{n_k} \rangle \xrightarrow{\mathscr{L}} f^2.\upsilon.$$

从而由性质 5.1.4 知 $Y = f.(\mu - \upsilon)$ 关于其自然 σ- 域流是局部平方可积鞅，f 的任意性表明 $\mu^p = \upsilon$，He, Wang 和 Yan[13] 的定理 11.54 表明 $\{\mu_n\}_{n\geqslant 1}$ 的弱极限按分布是唯一的，故得 $\mu_n \xrightarrow{\mathscr{L}} \mu$，$\mu^p = \upsilon$. 证毕.

5.1.7 推论 设 $\{\mu_n\}_{n\geqslant 1}$ 为一列整值随机测度，$\upsilon_n = \mu_n^p$，υ 为随机连续的非随机测度. 如果 $\upsilon_n \xrightarrow{\mathscr{L}} \upsilon$，则存在整值随机测度 μ，使得 $\mu_n \xrightarrow{\mathscr{L}} \mu$，$\mu$ 为 Poisson 测度，并且 $\upsilon = \mu^p$.

5.1.8 定理 设 $\{\mu, \mu_n, n \geqslant 1\}$ 为一列 Poisson 随机测度，$\upsilon_n = \mu_n^p$，$\upsilon = \mu^p$，则 $\mu_n \xrightarrow{\mathscr{L}} \mu$ 的充要条件是 $\upsilon_n \xrightarrow{v} \upsilon$.

证明 因为 μ 和 μ_n 均为 Poisson 随机测度，所以 υ_n 和 υ 都是随机连续的非随机测度. 定理的充分性是推论 5.1.7 的直接结果. 因此我们只要证明必要性.

假设 $\mu_n \xrightarrow{\mathscr{L}} \mu$. 对任意的 $f \in C_K(\boldsymbol{R}_+ \times \boldsymbol{E})$，令 $X^n = f.\mu_n$，$X = f.\mu$，则 $X^n \xrightarrow{\mathscr{L}} X$. 因为 μ^n 和 μ 都是 Poisson 随机测度，f 非随机，所以 X 及 X^n 均为独立增量的半鞅. 由 f 的有界性可推得 $\{\Delta X, \Delta X^n, n \geqslant 1\}$ 一致有界，设此界为 a，取连续有界的截尾函数 h 为 $h(x) = x, |x| \leqslant a$，因此 X 和 X^n 关于截尾函数 h 的可料对偶投影分别为 $B = f.\upsilon$ 和 $B^n = f.\upsilon_n$. 由定理 4.1.2 知当 $X^n \xrightarrow{\mathscr{L}} X$ 时，$\sup_{s\leqslant t} |B_s^n - B_s| \to 0, n \to \infty$ 对任意的 $t > 0$ 成立，即在 $\boldsymbol{R}_+$ 的紧子集

上，$f.\upsilon_n$ 一致收敛于 $f.\upsilon$. 由 f 具有紧支集知

$$\int_0^{\infty}\int_E f(s,x)\upsilon_n(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x) \to \int_0^{\infty}\int_E f(s,x)\upsilon(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x).$$

f 的任意性表明 $\upsilon_n \xrightarrow{v} \upsilon$. 证毕.

5.2 随机积分的弱收敛

本节中我们假设推论 5.1.7 中的条件成立，则有 $\mu_n \xrightarrow{\mathscr{L}} \mu$，并且对任意的 $f \in C_K(\boldsymbol{R}_+ \times \boldsymbol{E})$，$\int_0^{\cdot}\int_E f(s,x)\mu_n(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x) \xrightarrow{\mathscr{L}} \int_0^{\cdot}\int_E f(s,x)\mu(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)$ 及 $\int_0^{\cdot}\int_E f(s,x)\,\widetilde{\mu}_n(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x) \xrightarrow{\mathscr{L}} \int_0^{\cdot}\int_E f(s,x)\,\widetilde{\mu}\,(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)$. 本节我们研究 $\int_0^{\cdot}\int_E f_n(s,x)\mu_n(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)$ 及 $\int_0^{\cdot}\int_E f_n(s,x)\,\widetilde{\mu}_n(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)$ 的收敛性，其中 $\{f_n, n \geqslant 1\}$ 未必有紧支集，或者没有一致紧支集.

5.2.1 性质 设 f_n, g_n, f 和 g 都是 $\boldsymbol{R}_+ \times \boldsymbol{E}$ 上具有相同紧支集的 $\boldsymbol{R}^d$- 值可测函数. 在推论 5.1.7 的条件下，如果 $f_n \xrightarrow{c.c.} f(\upsilon\text{-}a.s.)$，$g_n \xrightarrow{c.c.} g(\upsilon\text{-}a.s.)$，并且 $\{f_n\}_{n\geqslant 1}$ 一致有界，则

$$\left(\int_0^{\cdot}\int_E f_n(s,x)\,\widetilde{\mu}_n(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x), \int_0^{\cdot}\int_E g_n(s,x)\mu_n(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)\right)$$
$$\xrightarrow{\mathscr{L}} \left(\int_0^{\cdot}\int_E f(s,x)\,\widetilde{\mu}\,(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x), \int_0^{\cdot}\int_E g(s,x)\mu(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)\right).$$

如果

$$\int_0^{\cdot}\int_E f_n(s,x)\upsilon_n(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x) \xrightarrow{\mathscr{L}} \int_0^{\cdot}\int_E f(s,x)\upsilon(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x), \qquad (2.1)$$

则 $\{f_n\}_{n\geqslant 1}$ 一致有界的条件可以去掉.

证明 不失一般性，我们可以假设 $\mu_n \to \mu, a.s.$ 因为 υ 零集是 μ 的依概率 1 零集，由假设知依概率 1 有 $(f_n, g_n) \xrightarrow{c.c.} (f.g)$ $(\mu\text{-}a.s.)$，所以由定理 2.4.3 知

$$\left(\int_0^{\cdot}\int_E f_n(s,x)\mu_n(ds,dx),\int_0^{\cdot}\int_E g_n(s,x)\mu_n(ds,dx)\right)$$
$$\longrightarrow\left(\int_0^{\cdot}\int_E f(s,x)\mu(ds,dx),\int_0^{\cdot}\int_E g(s,x)\mu(ds,dx)\right),a.s.$$
引理 2.4.2 可推得
$$\int_0^{\cdot}\int_E f_n(s,x)v_n(ds,dx)\to\int_0^{\cdot}\int_E f(s,x)v(ds,dx),a.s.$$
由 $\int_0^{\cdot}\int_E f(s,x)v(ds,dx)$ 的连续性可得
$$\left(\int_0^{\cdot}\int_E f_n(s,x)\tilde{\mu}_n(ds,dx),\int_0^{\cdot}\int_E g_n(s,x)\mu_n(ds,dx)\right)$$
$$\to\left(\int_0^{\cdot}\int_E f(s,x)\tilde{\mu}(ds,dx),\int_0^{\cdot}\int_E g(s,x)\mu(ds,dx)\right),a.s.$$
证毕.

下面我们去掉 f_n 和 g_n 具有一致紧支集的假设，设 $\{K_n\}_{n\geq1}$ 为一列紧子集，$K_n\subset K^\circ_{n+1}$，$n\geq1$，并且 $\bigcup_{n=1}^{\infty}K_n=\boldsymbol{E}$，其中 K°_n 为 K_n 的内点集.

5.2.2 定理 设 f_n、g_n、f 和 g 都是 $\boldsymbol{R}_+\times\boldsymbol{E}$ 上的 $\boldsymbol{R}^d$-值可测函数，并且满足(Ⅰ) $f_n\in\Phi^2_{\mu_n}$，(Ⅱ) $g_n\in\Phi^1_{\mu_n}$，(Ⅲ) $\{f_n\}_{n\geq1}$ 一致有界. 又假设推论 5.1.7 中的条件成立，并且存在 $f\in\Phi^2_\mu$，$g\in\Phi^1_\mu$，使得 $(f_n,g_n)\xrightarrow{c.c.}(f,g)(v\text{-}a.s.)$. 如果对任意的 $\epsilon>0$，$T>0$，
$$\lim_{k\to\infty}\limsup_{n\to\infty}P\left(\left\{\int_0^T\int_{E\setminus K_k}|f_n(s,x)|^2v_n(ds,dx)\geq\epsilon\right\}\right)=0,\quad(2.2)$$
$$\lim_{k\to\infty}\limsup_{n\to\infty}P\left(\left\{\int_0^T\int_{E\setminus K_k}|g_n(s,x)|v_n(ds,dx)\geq\epsilon\right\}\right)=0,\quad(2.3)$$
则
$$\left(\int_0^{\cdot}\int_E f_n(s,x)\tilde{\mu}_n(ds,dx),\int_0^{\cdot}\int_E g_n(s,x)\mu_n(ds,dx)\right)$$
$$\xrightarrow{\mathscr{L}}\left(\int_0^{\cdot}\int_E f(s,x)\tilde{\mu}(ds,dx),\int_0^{\cdot}\int_E g(s,x)\mu(ds,dx)\right).\quad(2.4)$$
如果对任意的 $k\geq1$，

$$\int_0^{\cdot}\int_{K_k} f_n(s,x)\upsilon_n(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x) \xrightarrow{\mathscr{L}} \int_0^{\cdot}\int_{K_k} f(s,x)\upsilon(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x), \qquad (2.5)$$

则条件(Ⅱ)可以除去.

证明　取 $\varphi_k, k=1,2,\cdots$ 为连续函数,使得 $I_{K_k}(x)\leqslant\varphi_k(x)\leqslant I_{K_{k+1}}(x)$. 定义

$$W_t^{n,k}=\int_0^t\int_E \varphi_k(x)f_n(s,x)\,\widetilde{\mu}_n(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x), \qquad n,k\geqslant 1$$

$$W_t^k=\int_0^t\int_E \varphi_k(x)f(s,x)\,\widetilde{\mu}\,(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x), \qquad k\geqslant 1$$

$$Z_t^{n,k}=\int_0^t\int_E \varphi_k(x)g_n(s,x)\mu_n(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x), \qquad n,k\geqslant 1$$

以及

$$Z_t^k=\int_0^t\int_E \varphi_k(x)g(s,x)\mu(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x), \qquad k\geqslant 1.$$

对任意的 $0<T<\infty$,由性质 5.2.1 知在 $[0,T]$ 上有

$$(W^{n,k},Z^{n,k})\xrightarrow{\mathscr{L}}(W^k,Z^k), \quad n\to\infty.$$

从而有

$$(W^{n,k},Z^{n,k})\xrightarrow{\mathscr{L}}(W^k,Z^k), \quad n\to\infty, \quad \forall\, k\geqslant 1.$$

所以,要证明(2.4)成立,由引理 4.4.9 只要证明:$\forall\, T>0,\varepsilon>0$,

$$\lim_{k\to\infty}\limsup_{n\to\infty}P\left(\left\{\left[W^{n,k}-\int_0^{\cdot}\int_E f_n(s,x)\,\widetilde{\mu}_n(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)\right]_T^*\geqslant\varepsilon\right\}\right)=0, \qquad (2.6)$$

及

$$\lim_{k\to\infty}\limsup_{n\to\infty}P\left(\left\{\left[Z^{n,k}-\int_0^{\cdot}\int_E g_n(s,x)\mu_n(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)\right]_T^*\geqslant\varepsilon\right\}\right)=0. \qquad (2.7)$$

(2.7) 可由(2.3) 推得. 为证(2.6),利用 Lenglart 不等式得

$$P\left(\left\{\left[W^{n,k}-\int_0^{\cdot}\int_E f_n(s,x)\,\widetilde{\mu}_n(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)\right]_T^*\geqslant\varepsilon\right\}\right)$$

$$\leqslant\frac{\eta}{\varepsilon^2}+P\left(\left\{\int_0^T\int_E[f_n(s,x)-\varphi_k(x)f_n(s,x)]^2\upsilon_n(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)\right.\right.$$

$$\geqslant \eta\}\Big)$$

$$\leqslant \frac{\eta}{\varepsilon^2} + P\Big(\Big\{\int_0^T\int_{E\setminus K_k} f_n^2(s,x)\nu_n(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x) \geqslant \eta\Big\}\Big).$$

由(2.2)及ε、η的任意性即得(2.6)成立.

假设(2.5)成立而$\{f_n\}_{n\geqslant 1}$不一致有界，从而由定理2.4.3知

$$\int_0^{\cdot}\int_{K_k} f_n(s,x)\mu_n(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x) \xrightarrow{s.k.} \int_0^{\cdot}\int_{K_k} f(s,x)\mu(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x), a.s.,$$

$$\forall\, k \geqslant 1.$$

因此有

$$\int_0^{\cdot}\int_{K_k} f_n(s,x)\widetilde{\mu}_n(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x) \xrightarrow{s.k.} \int_0^{\cdot}\int_{K_k} f(s,x)\widetilde{\mu}(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x), a.s.,$$

$$\forall\, k \geqslant 1.$$

由假设条件可推得

$$\Big(\int_0^{\cdot}\int_{K_k} f_n(s,x)\widetilde{\mu}_n(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x), \int_0^{\cdot}\int_{K_k} g_n(s,x)\mu_n(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)\Big)$$

$$\xrightarrow{\mathscr{L}} \Big(\int_0^{\cdot}\int_{K_k} f(s,x)\widetilde{\mu}(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x), \int_0^{\cdot}\int_{K_k} g(s,x)\mu(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)\Big).$$

利用Lenglart不等式，(2.2)和(2.3)可推得结论成立. 证毕.

5.2.3　注　由(2.4)我们立即可以推得

$$\int_0^{\cdot}\int_E f_n(s,x)\widetilde{\mu}_n(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x) + \int_0^{\cdot}\int_E g_n(s,x)\mu_n(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)$$

$$\xrightarrow{\mathscr{L}} \int_0^{\cdot}\int_E f(s,x)\widetilde{\mu}(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x) + \int_0^{\cdot}\int_E g(s,x)\mu(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x). \qquad (2.8)$$

在(2.4)或(2.8)中的极限过程是不含Gauss部分的Lévy过程，可是如果我们合并中心极限定理与定理5.2.2，则可以得到极限过程既有Gauss部分又有Poisson部分. 为此我们先证一个有用的引理.

5.2.4　引理　设$\{a_n\}_{n\geqslant 1}$是满足条件$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$的非负数

列，$\{\xi_i^n\}_{i,n\geqslant 1}$ 是非负随机变量序列，并且满足

$$\xi_i^n \xrightarrow{P} a_i, \quad n\to\infty, \quad \forall\, i\geqslant 1, \tag{2.9}$$

则存在 $k(1)\leqslant k(2)\leqslant\cdots\leqslant k(n)\to\infty$，使得

$$\lim_{m\to\infty}\limsup_{n\to\infty} P\Big(\Big\{\sum_{i=m}^{k(n)}\xi_i^n\geqslant\delta\Big\}\Big)=0, \quad \forall\,\delta>0, \tag{2.10}$$

以及

$$\sum_{i=1}^{k(n)}\xi_i^n \xrightarrow{P} \sum_{i=1}^{\infty}a_i, \quad n\to\infty. \tag{2.11}$$

证明　(2.9) 表明存在序列 $j(1)<j(2)<\cdots$，使得

$$P\Big(\Big\{|\xi_i^n-a_i|>\frac{1}{2^i}\Big\}\Big)\leqslant\frac{1}{2^i}, \quad \forall\, n\geqslant j(i). \tag{2.12}$$

定义 $k(n)=l$，如果 $j(l)\leqslant n<j(l+1)$. 因为 $l\leqslant k(n)$ 可推得 $n\geqslant j(l)$. 由(2.12) 我们有

$$P\Big(\Big\{\xi_l^n>\frac{1}{2^l}+a_l\Big\}\Big)\leqslant\frac{1}{2^l}, \quad \forall\, l\leqslant k(n). \tag{2.13}$$

对任意的 $\delta>0$，当 m 充分大时可得 $\sum_{l=m}^{\infty}(\frac{1}{2^l}+a_l)<\delta$，所以

$$P\Big(\Big\{\sum_{i=m}^{k(n)}\xi_i^n>\delta\Big\}\Big)\leqslant P\Big(\Big\{\sum_{i=m}^{k(n)}\xi_i^n>\sum_{i=m}^{k(n)}(2^{-i}+a_i)\Big\}\Big)$$

$$\leqslant\sum_{i=m}^{k(n)}P(\{\xi_i^n>2^{-i}+a_i\})\leqslant 2^{1-m}$$

对 m 充分大时成立，即(2.10) 得证．由(2.9) 和(2.10) 立即可以推得(2.11). 证毕.

5.2.5　定理　假设推论 5.1.7 中的条件全部成立，f_n、g_n、f 和 g 满足定理 5.2.2 中除去(2.2) 的全部条件，并且 $\forall\, T>0$，

$$\lim_{k\to\infty}\limsup_{n\to\infty}\sup\{|f_n(t,x)|: 0\leqslant t\leqslant T, x\notin K_k\}=0. \tag{2.14}$$

设 $M^{n,i}$ 为连续的局部可积鞅，定义 $X^n=(X^{n,1},\cdots,X^{n,d})$ 和 $Y^{n,k}$

$=(Y^{n,k,1},\cdots,Y^{n,k,d})$ 为

$$X^{n,i}=M^{n,i}+\int_0^{\cdot}\int_E f_n^i(s,x)\,\widetilde{\mu}_n(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)$$
$$+\int_0^{\cdot}\int_E g_n^i(s,x)\mu_n(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x),$$
$$Y^{n,k,i}=M^{n,i}+\int_0^{\cdot}\int_{E\setminus K_k} f_n^i\,\widetilde{\mu}_n(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x).$$

如果存在 $\boldsymbol{R}^d\otimes\boldsymbol{R}^d$- 值函数 $\Phi(t)=(\Phi^{ij}(t))_{i,j\leqslant d}$ 使得

$$\lim_{k\to\infty}\limsup_{n\to\infty}P(\{|\langle Y^{n,k}\rangle_t-\Phi(t)|\geqslant\delta\})=0,\forall\ t>0,\delta>0,\tag{2.15}$$

则

$$X^n\xrightarrow{\mathscr{L}}M+\int_0^{\cdot}\int_E f(s,x)\,\widetilde{\mu}\,(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)$$
$$+\int_0^{\cdot}\int_E g(s,x)\mu(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x),$$

其中 μ 是 Poisson 随机测度，$\mu^p=\upsilon$，并且 M 是与 μ 独立的 Gauss 鞅，$\langle M\rangle=\Phi$.

假设条件(Ⅲ)(在定理 5.2.2 中)也可以被条件(2.5)代替.

证明　设 φ_k 和定理 5.2.2 的证明中相同，对任意 $T>0$，令

$$\xi_i^n=\int_0^T\int_E[\varphi_{i+1}(x)-\varphi_i(x)]|f_n|^2\upsilon_n(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x),\quad i,n\geqslant 1,$$
$$a_i=\int_0^T\int_E[\varphi_{i+1}(x)-\varphi_i(x)]|f|^2\upsilon(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x),\quad i\geqslant 1.$$

由于 $f_n\xrightarrow{c.c.}f(\upsilon\text{-}a.s.)$ 可推得 $[\varphi_{i+1}-\varphi_i]|f_n|^2\xrightarrow{c.c.}[\varphi_{i+1}-\varphi_i]|f|^2$，从而有 $\xi_i^n\xrightarrow{P}a_i,\forall\ i\geqslant 1$. 而 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}a_i\leqslant\int_0^T\int_E|f|^2\upsilon(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)<\infty$ 显然，这是因为 $f\in\Phi_\mu^2$. 由引理 5.2.4 知存在序列 $\{k(n)\}_{n\geqslant 1}$，$k(n)\uparrow\infty$，使得(2.10)和(2.11)成立.

令 $f_n^{(1)}(t,x)=f_n(t,x)I_{K_{k(n)}}(x)$，$f_n^{(2)}(t,x)=f_n(t,x)-f_n^{(1)}(t,x),n\geqslant 1$，记

$$U^n = M^n + \int_0^{\cdot}\int_E f_n^{(2)}(s,x)\,\widetilde{\mu}_n(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x),$$

$$V^n = \int_0^{\cdot}\int_E f_n^{(1)}(s,x)\,\widetilde{\mu}_n(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x),$$

和

$$W^n = \int_0^{\cdot}\int_E g(s,x)\,\mu_n(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x),$$

则 $X^n = U^n + V^n + W^n$. 根据序列$\{k(n)\}_{n\geqslant 1}$的取法知：如果 $m \leqslant k(n)$，由 $f_n^{(1)}$ 的定义有

$$\int_0^T\int_{E\setminus K_{m+1}} |f_n^{(1)}(s,x)|^2 \nu_n(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)$$

$$\leqslant \int_0^T\int_E [\varphi_{k(n)+1}(x) - \varphi_m(x)]\,|f_n(s,x)|^2 \nu_n(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x) = \sum_{i=m}^{k(n)} \xi_i^n. \tag{2.16}$$

由(2.10)和(2.16)可推得：

$$\lim_{m\to\infty}\limsup_{n\to\infty} P\left(\left\{\int_0^T\int_{E\setminus K_m} |f_n^{(1)}(s,x)|^2 \nu_n(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x) > \varepsilon)\right\}\right) = 0,$$
$$\forall\, \varepsilon > 0.$$

从而对于$\{f_n^{(1)}\}_{n\geqslant 1}$和$\{g_n\}_{n\geqslant 1}$，定理 5.2.2 中的条件全部被满足，所以由定理 5.2.2 得

$$V^n + W^n \xrightarrow{\mathscr{L}} \int_0^{\cdot}\int_E f(s,x)\,\widetilde{\mu}\,(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x) + \int_0^{\cdot}\int_E g(s,x)\mu(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x). \tag{2.17}$$

由条件(2.14)立即可推得

$$\sup\{|f_n^{(2)}(s,x)| : 0 \leqslant t \leqslant T, x \in E\} \to 0, \quad \forall\, T > 0. \tag{2.18}$$

因为对任意的 $t \leqslant T, k(n) \geqslant m > 1$，

$$|\langle U^{n,i}, U^{n,j}\rangle_t - \langle Y^{n,m,i}, Y^{n,m,j}\rangle_t|$$

$$\leqslant |\langle U^{n,i}, U^{n,j} - Y^{n,m,j}\rangle_t| + |\langle U^{n,i} - Y^{n,m,i}, Y^{n,m,j}\rangle|$$

$$\leqslant \langle U^{n,\cdot}\rangle_t^{\frac{1}{2}} \langle U^{n,\cdot} - Y^{n,m,\cdot}\rangle_t^{\frac{1}{2}} + \langle Y^{n,m,\cdot}\rangle_t^{\frac{1}{2}} \langle U^{n,\cdot} - Y^{n,m,\cdot}\rangle_t^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant 2\Big(\sum_{q=1}^{k(n)} \xi_q^n\Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\sum_{q=m-1}^{k(n)} \xi_q^n\Big)^{\frac{1}{2}},$$

所以由(2.10)和(2.11)容易推得

$$\lim_{m\to\infty} \limsup_{n\to\infty} P(\{|\langle U^n, U^n\rangle_t - \langle Y^{n,m}, Y^{n,m}\rangle_t| > \delta\}) = 0,$$

$$\forall\, \delta > 0. \quad (2.19)$$

合并(2.15)和(2.19)得

$$\lim_{n\to\infty} P(\{|\langle U^n, U^n\rangle_t - \Phi(t)| \geqslant \delta\})$$

$$\leqslant \lim_{m\to\infty} \limsup_{n\to\infty} P\Big(\Big\{|\langle U^n, U^n\rangle_t - \langle Y^{n,m}, Y^{n,m}\rangle_t| \geqslant \frac{\delta}{2}\Big\}\Big)$$

$$+ \lim_{m\to\infty} \limsup_{n\to\infty} P\Big(\Big\{|\langle Y^{n,m}\rangle_t - \Phi(t)| \geqslant \frac{\delta}{2}\Big\}\Big) = 0,$$

故由定理 4.1.4 知 $U^n \xrightarrow{\mathscr{L}} M$. 而$(U^n, V^n, W^n) \xrightarrow{\mathscr{L}}$
$\Big(M, \int_0^\cdot\int_E f(s,x)\widetilde{\mu}(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x), \int_0^\cdot\int_E g(s,x)\mu(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)\Big)$ 易证,从而有

$$X^n \xrightarrow{\mathscr{L}} M + \int_0^\cdot\int_E f(s,x)\,\widetilde{\mu}\,(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)$$

$$+ \int_0^\cdot\int_E g(s,x)\mu(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x).$$

独立增量半鞅的分解定理可推得 M 与 μ 独立. 证毕.

5.3 离散时间点过程的极限定理

为了书写方便,本节我们只考虑极限过程是时齐的 Poisson 过程,但这并非是本质的要求.

设$(\Omega^n, \mathscr{F}^n, P^n)$是概率空间,$(\mathscr{F}_i^n)_{i\geqslant 1}$是$\mathscr{F}^n$的子 σ- 域流. 对任意的 $t > 0$,记 $\mathscr{F}_t^n = \mathscr{F}_{[t]}^n$. 假设$\{\xi_{ni}\}_{i,n\geqslant 1}$是$(\mathscr{F}_i^n)$适应的实值随机变量的三角阵,我们定义离散时间点过程如下:

$$\boldsymbol{E} = [-\infty, 0) \cup (0, \infty],$$

$$D_{p_n} = \{i/n : i = 1,2,\cdots,\xi_{ni} \neq 0\},$$

$$p_n(i/n) = \xi_{ni}, \text{如果} \frac{i}{n} \in D_{p_n},$$

则 p_n 的跳测度为

$$\mu_n([0,t] \times A) = \left\{\frac{i}{n} \in D_{p_n} : \left(\frac{i}{n}, \xi_{ni}\right) \in [0,t] \times A\right\} \text{中点的}$$

个数. 容易计算 μ_n 的可料对偶投影为

$$\upsilon_n([0,t] \times A) = \sum_{i \leqslant nt} P^n(\{\xi_{ni} \in A\} | \mathscr{F}^n_{i-1}), \forall A \in \mathscr{E}. \tag{3.1}$$

设 $\bar{\upsilon}(\mathrm{d}x)$ 为 $(-\infty,\infty)\backslash\{0\}$ 上的 Borel 测度,使得对任意的 $\varepsilon > 0$, $\int_{|x|>\varepsilon} \bar{\upsilon}(\mathrm{d}x) < \infty$. 如果定义 $\bar{\upsilon}(\{-\infty\}) = \bar{\upsilon}(\{+\infty\}) = 0$,则 $\bar{\upsilon}$ 可看成 $\boldsymbol{E}$ 上的 Radon 测度,推论 5.1.7 可重新写为:

5.3.1 定理 对于任意的 $t > 0$ 和 $\bar{\upsilon}(\mathrm{d}x)$ 的任意连续点 x,如果成立

$$\sum_{k \leqslant nt} P^n(\{\xi_{nk} > x | \mathscr{F}^n_{k-1}\}) \xrightarrow{P} t\,\bar{\upsilon}((x,\infty)), \quad x > 0, \tag{3.2}$$

$$\sum_{k \leqslant nt} P^n(\{\xi_{nk} < x | \mathscr{F}^n_{k-1}\}) \xrightarrow{P} t\,\bar{\upsilon}((-\infty,x]), x < 0, \tag{3.3}$$

则 $\mu_n \xrightarrow{\mathscr{L}} \mu$,其中 μ 为 Poisson 随机测度,$\mu^p(\mathrm{d}t,\mathrm{d}x) = \mathrm{d}t\,\bar{\upsilon}(\mathrm{d}x)$.

设 $f_n(s,x), g_n(s,x), f(s,x)$ 和 $g(s,x)$ 是 $\boldsymbol{R}_+ \times \boldsymbol{R}$ 上满足下列条件的可测函数:

$$f_n(t,0) = g_n(t,0) = 0, \qquad \forall t \geqslant 0, n \geqslant 1, \tag{3.4}$$

$$\int_0^t \int_{|x|>0} \{f^2(s,x) + |g(s,x)| I_{(|x| \leqslant 1)}\} \bar{\upsilon}(\mathrm{d}x)\mathrm{d}s < \infty, \forall t \geqslant 0 \tag{3.5}$$

存在 $C > 0$,使得

$$|f_n(s,x)| \leqslant C, \quad \forall t > 0, x \in \boldsymbol{R}, n \geqslant 1 \tag{3.6}$$

$$\lim_{\epsilon\downarrow 0}\limsup_{n\to\infty}\sup\{|f_n(s,x)|:0\leqslant t\leqslant T,|x|\leqslant\epsilon\}=0,\forall\ T>0. \tag{3.7}$$

条件(3.4)相当于我们考虑取值于 $E=[-\infty,0)\cup(0,+\infty]$ 上的点过程．由(3.5)可推得 $f\in\Phi_\mu^2,g\in\Phi_\mu^1$,(3.6)表明 $f_n\in\Phi_{\mu_n}^2$. 注意到 $g_n\in\Phi_\mu^1$ 总是对的,(3.7)相当于(2.14). 故我们可以把定理 5.2.5 改写为:

5.3.2 定理 在条件(3.2)—(3.7)下,如果假设

(Ⅰ) $(f_n,g_n)\xrightarrow{c.c.}(f,g)\quad(\mathrm{d}t\,\bar{v}(\mathrm{d}x)\text{-}a.s.)$,

(Ⅱ) 存在 $\sigma^2\geqslant 0$ 使得对任意的 $t\geqslant 0,\delta>0$,

$$\lim_{\epsilon\downarrow 0}\limsup_{n\to\infty}P^n\left(\left\{\left|\sum_{i\leqslant nt}\left(E^n[f_n^2(\frac{i}{n},\xi_{ni}^\epsilon)|\mathscr{F}_{i-1}^n]-[E^n(f_n(\frac{i}{n},\xi_{ni}^\epsilon)|\mathscr{F}_{i-1}^n)]^2\right)-\sigma^2t\right|\geqslant\delta\right\}\right)=0,$$

其中 $\xi_{ni}^\epsilon=\xi_{ni}I_{\{|\xi_{ni}|\leqslant\epsilon\}}$.

(Ⅲ) $\lim\limits_{\epsilon\downarrow 0}\limsup\limits_{n\to\infty}P^n\left(\left\{\sum\limits_{i\leqslant nt}E^n(|g_n(\frac{i}{n},\xi_{ni}^\epsilon)||\mathscr{F}_{i-1}^n)\geqslant\delta\right\}\right)=0,$

$$\forall\ t\geqslant 0,\delta>0.$$

记 $A_t^n=\sum\limits_{i\leqslant nt}E^n\left[f_n\left(\frac{i}{n},\xi_{ni}\right)|\mathscr{F}_{i-1}^n\right]$,则我们有

$$\sum_{i\leqslant nt}\left\{f_n\left(\frac{i}{n},\xi_{ni}\right)+g_n\left(\frac{i}{n},\xi_{ni}\right)\right\}-A_t^n$$
$$\xrightarrow{\mathscr{L}}\sigma B_t+\int_0^t\int_E f(s,x)\,\tilde{\mu}\,(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)+\int_0^t\int_E g(s,x)\mu(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x).$$

μ 和定理 5.3.1 中的相同,B 为与 μ 独立的标准 Brown 运动.

如果 $f_n\in\Phi_{\mu,loc}^2$,并且对一列 $0<\epsilon_k\downarrow 0$,成立

$$\sum_{i\leqslant nt}E\left[f_n\left(\frac{i}{n},\xi_{ni}\right)I_{\{|\xi_{ni}|>\epsilon_k\}}|\mathscr{F}_{i-1}^n\right]$$
$$\xrightarrow{\mathscr{L}}\int_0^t\int_{|x|>\epsilon_k}f(s,x)\mathrm{d}s\,\bar{v}(\mathrm{d}x),\quad n\to\infty \tag{3.8}$$

则条件(3.6)可以去掉.

5.3.3　注　（Ⅰ）对于多维情形，我们可以用同样的方法进行讨论.

（Ⅱ）如果 $A^n \xrightarrow{\mathscr{L}} a$，则 $\left\{\sum_{i\leq nt}\{f_n(\frac{i}{n},\xi_{ni})+g_n(\frac{i}{n},\xi_{ni})\}\right\}_{n\geq 1}$ 收敛.

应用定理 5.3.2，我们可以得到下述例子.

5.3.4　例子　假设 $\xi_1,\xi_2,\cdots$ 为非负的独立同分布随机变量序列，并且成立

$$\lim_{x\to\infty} xP(\{\xi_1 > x\}) = 1,$$

则对任意的 $1<\alpha_1<\cdots<\alpha_d(d\geq 1)$ 和 $0<\beta<1/2$，我们有

$$\left(n^{-\alpha_1}\sum_{i\leq nt}\xi_i^{\alpha_1},\cdots,n^{-\alpha_d}\sum_{d\leq nt}\xi_i^{\alpha_d},n^{-\frac{1}{2}}\sum_{i\leq nt}(\xi_i^\beta - E[\xi_i^\beta])\right)$$
$$\xrightarrow{\mathscr{L}}\left(\int_0^t\int_{x>0}x^{\alpha_1}\mu(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x),\cdots,\int_0^t\int_{x>0}x^{\alpha_d}\mu(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x),\sigma B_t\right),\quad(3.9)$$

其中 μ 是 $R\setminus\{0\}$ 上 Poisson 点过程的跳测度，$\mu^p = I_{(x>0)}\left(\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}s\mathrm{d}x$，$B$ 是与 μ 独立的标准 Brown 运动，σ^2 是 ξ_1^β 的方差，结论(3.9)可以重述为：

$$\left(\int_0^\cdot\int_E x^{\alpha_1}\mu_n(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x),\cdots,\int_0^\cdot\int_E x^{\alpha_d}\mu_n(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x),n^{\beta-\frac{1}{2}}\int_0^\cdot\int_E x^\beta\,\widetilde{\mu}_n(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)\right)$$
$$\xrightarrow{\mathscr{L}}\left(\int_0^\cdot\int_E x^{\alpha_1}\mu(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x),\cdots,\int_0^\cdot\int_E x^{\alpha_d}\mu(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x),\sigma B\right).$$

这个例子的证明是比较容易的，只要验证定理 5.3.2 中的条件全部被满足即可，详细的工作留给读者来完成.

5.4　点过程的渐近独立性

设 $\boldsymbol{E}_i,i=1,2,\cdots,d$ 均为具有可数基的 Hausdorff 空间，$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_1\times\boldsymbol{E}_2\times\cdots\times\boldsymbol{E}_d$，并在 $\boldsymbol{E}$ 上赋予乘积拓扑，记 Π_i 是 $\boldsymbol{E}$ 到 $\boldsymbol{E}_i$ 的投影映射：$\Pi_i(x_1,\cdots,x_d)=x_i$，设 p 为 $\boldsymbol{E}$ 值点过程，我们记 $\Pi_i p$ 是 p

的第 i 个分量，即 $(\Pi_i p)(t) = \Pi_i(p(t))$，$\mu^i$ 为 $\Pi_i p$ 的跳测度，其可料对偶投影为 υ^i，如果记 μ 为 p 的跳测度，υ 为其可料对偶投影，则有

$$\upsilon^i([0,t] \times A) = \upsilon([0,t] \times \Pi_i^{-1}(A)), \quad \forall A \in \mathscr{B}(\boldsymbol{E}_i).$$

这一节我们将研究 $\boldsymbol{E}$- 值点过程序列 $\{p_n\}_{n\geqslant 1}$ 的渐近独立性.

5.4.1 定理 对于每个 $i(1 \leqslant i \leqslant d)$，假设 μ_n^i 和 υ_n^i $a.s.$ 为 $((0,\infty) \times \boldsymbol{E}_i, \mathscr{B}_+ \times \mathscr{B}(\boldsymbol{E}_i))$ 上的 Radon 测度，并且满足

$$\upsilon_n^i(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x) \xrightarrow{\mathscr{L}} \upsilon^i(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x), n \to \infty, \quad \forall 1 \leqslant i \leqslant d, \tag{4.1}$$

其中 υ^i 随机连续，且为 $([0,\infty) \times \boldsymbol{E}_i, \mathscr{B}_+ \times \mathscr{B}(\boldsymbol{E}_i))$ 上的 Radon 测度. 如果对于紧子集 $K_i \subset \boldsymbol{E}_i(1 \leqslant i \leqslant d)$，$\forall t > 0$，

$$\upsilon_n([0,t] \times (\Pi_i^{-1}(K_i) \cap \Pi_j^{-1}(K_j))) \xrightarrow{P} 0, n \to \infty, i \neq j \tag{4.2}$$

则有

$$\begin{aligned}&(\mu_n^1(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x_1), \cdots, \mu_n^d(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x_d)) \\ &\xrightarrow{\mathscr{L}} (\mu^1(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x_1), \cdots, \mu^d(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x_d)),\end{aligned} \tag{4.3}$$

其中 $\mu^1, \cdots, \mu^d$ 是相互独立的 Poisson 点过程的跳测度，$(\mu^i)^p = \upsilon^i$，$i = 1, \cdots, d$.

证明 每个分量的收敛性是推论 5.1.7 的直接结果，因此我们只要证明 $\mu^1, \cdots, \mu^d$ 相互独立. 记 $\overline{\boldsymbol{E}}_i = \boldsymbol{E}_i \cup \{\Delta_i\}$ 为 $\boldsymbol{E}_i$ 的单点紧化空间，$Z = \overline{\boldsymbol{E}}_1 \times \cdots \times \overline{\boldsymbol{E}}_d \backslash \{\Delta\}$，其中 $\Delta = (\Delta_1, \cdots, \Delta_d)$. 因为 $\boldsymbol{E}$ 是 Z 的子集，所以 p_n 可以看成为 Z- 值点过程，当然我们必须验证 μ_n 和 υ_n 既是 $(\boldsymbol{R}_+ \times \boldsymbol{E}, \mathscr{B}_+ \times \mathscr{B}(\boldsymbol{E}))$ 上又是 $(\boldsymbol{R}_+ \times Z, \mathscr{B}_+ \times \mathscr{B}(Z))$ 上的 Radon 测度 $(a.s.)$. 但这是容易的，因为我们已假设 $\mu_n^i, \upsilon_n^i(i = 1,2,\cdots,d)$ 为 $(\boldsymbol{R}_+ \times \boldsymbol{E}_i, \mathscr{B}_+ \times \mathscr{B}(\boldsymbol{E}_i))$ 上的 Radon 测度. 令 $F_i = \{x \in Z; \Pi_j x = \Delta_j, j \neq i\}$，$i = 1,2,\cdots,d$，则 $F_1, F_2, \cdots, F_d$ 互不相交. 由条件(4.1) 和(4.2) 可推得在 $\mathscr{M}(\boldsymbol{R}_+ \times Z)$ 上

$$\upsilon_n \xrightarrow{\mathscr{L}} \Gamma, \tag{4.4}$$

其中 $\Gamma \in \mathscr{M}(\boldsymbol{R}_+ \times Z)$ 是集中在 $\boldsymbol{R}_+ \times (\bigcup_{i=1}^d F_i)$ 上，并且满足

$$\Gamma([0,t] \times \widetilde{A}^i) = \nu^i([0,t] \times A), A \in \mathscr{B}(\boldsymbol{E}_i), 1 \leqslant i \leqslant d.$$

这里 $\widetilde{A}^i = \{x \in Z : x_i \in A, x_j = \Delta_j, \forall j \neq i\} (\subset F_i)$. 推论 5.1.7，(4.4) 表明在 $\mathscr{M}(\boldsymbol{R}_+ \times Z)$ 上

$$\mu_n \xrightarrow{\mathscr{L}} \mu, \tag{4.5}$$

其中 μ 是一 Poisson 点过程的跳测度，$\mu^p = \Gamma$.

取函数 $f_i \in C_K(\boldsymbol{R}_+ \times \boldsymbol{E}_i), i = 1,2,\cdots,d$，定义 $f(t,x) = (f_1(t,\Pi_1 x),\cdots,f_d(t,\Pi_d x)), x \in Z$，此处定义 $f_i(t,\Delta_i) = 0, i = 1, 2,\cdots,d$. 注意到在 $\boldsymbol{R}_+ \times Z$ 上 f 有紧支集（在 $\boldsymbol{R}_+ \times \boldsymbol{E}$ 上 f 未必有紧支集），所以由 (4.5) 我们有

$$\int_0^\infty \int_Z f(t,x)\mu_n(\mathrm{d}t,\mathrm{d}x) \xrightarrow{\mathscr{L}} \int_0^\infty \int_Z f(t,x)\mu(\mathrm{d}t,\mathrm{d}x),$$

即

$$\left(\int_0^\infty \int_{E_1} f_1(t,u)\mu_n^1(\mathrm{d}t,\mathrm{d}u),\cdots,\int_0^\infty \int_{E_d} f_d(t,u)\mu_n^d(\mathrm{d}t,\mathrm{d}u)\right) \xrightarrow{\mathscr{L}}$$

$$\left(\int_0^\infty \int_{E_1} f_1(t,u)\mu^1(\mathrm{d}t,\mathrm{d}u),\cdots,\int_0^\infty \int_{E_d} f_d(t,u)\mu^d(\mathrm{d}t,\mathrm{d}u)\right). \tag{4.6}$$

因为 μ^p 和 μ 都集中在 $\bigcup_{i=1}^d F_i$ 上，所以

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \int_Z f_i(t,x_i)\mu(\mathrm{d}t,\mathrm{d}x) &= \sum_{j=1}^d \int_0^\infty \int_{F_j} f_i(t,x_i)\mu(\mathrm{d}t,\mathrm{d}x) \\ &= \int_0^\infty \int_{F_i} f_i(t,x_i)\mu(\mathrm{d}t,\mathrm{d}x).\end{aligned}$$

注意到 $\{F_i\}_{i=1}^d$ 互不相交，因此我们有 $\left\{\int_0^\infty \int_Z f_i(s,x_i)\mu(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)\right\}_{i=1}^d$ 相互独立. (4.6) 表明 $\{\Pi_i p_n\}_{i=1}^d$ 当 $n \to \infty$ 时渐近独立. 证毕.

作为定理 5.4.1 的一个例子，我们考虑由独立同分布的随机变量序列所构成点过程的收敛性.

设 $\{\xi_n\}_{n\geqslant 1}$ 是独立的服从 $[0,1]$ 上均匀分布的随机变量序列，

对于任意的 $a(0 \leqslant a \leqslant 1)$，定义点过程 $p_n^a, n \geqslant 1$ 如下：

$$p_n^a\left(\frac{k}{n}\right) = n(\xi_k - a), \quad D_{p_n^a} = \left\{\frac{k}{n}: k = 1,2,\cdots,\xi_k \neq a\right\}.$$

记 $\mu_n^a(\mathrm{d}t,\mathrm{d}x)$ 为 p_n^a 的跳测度，则 μ_n^a 的可料对偶投影为

$$\begin{aligned} \nu_n^a([0,t] \times \mathrm{d}x) &= [nt]P(n(\xi_1 - a) \in \mathrm{d}x) \\ &= I_{\{-na \leqslant x \leqslant n(1-a)\}} \frac{[nt]}{n}\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

因此在 $\mathscr{M}(\boldsymbol{R}_+ \times \boldsymbol{R})$ 上，我们有

$$\nu_n^a(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x) \xrightarrow{\mathscr{L}} \chi^a(x)\mathrm{d}s\mathrm{d}x, \tag{4.7}$$

按照 $a = 0, 0 < a < 1$ 或 $a = 1$，$\chi^a(x) = I_{R_+}(x)$，1 或 $I_{(-\infty,0]}(x)$。故由推论 5.1.7 知：对任意的 $0 \leqslant a \leqslant 1$，在 $\mathscr{M}(\boldsymbol{R}_+ \times \boldsymbol{R})$ 上，

$$\mu_n^a(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x) \xrightarrow{\mathscr{L}} \mu^a(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x), \quad n \to \infty, \tag{4.8}$$

其中 μ^a 是一 Poisson 随机测度，其可料对偶投影为 $\chi^a(x)\mathrm{d}t\mathrm{d}x$。下面我们研究 $\{\mu_n^a\}_{a \geqslant 0}$ 的联合收敛性。

5.4.2 定理 取 $0 = a_1 < \cdots < a_d = 1 (d \geqslant 2)$，记 $\mu_n^i = \mu_n^{a_i}$，$i \leqslant d$，则在 $\mathscr{M}(\boldsymbol{R}_+ \times \boldsymbol{R}) \times \cdots \times \mathscr{M}(\boldsymbol{R}_+ \times \boldsymbol{R})$（$d$ 个相乘）上

$$(\mu_n^1, \cdots, \mu_n^d) \xrightarrow{\mathscr{L}} (\mu^1, \cdots, \mu^d), \quad n \to \infty, \tag{4.9}$$

其中 $\{\mu^i\}_{i=1}^d$ 是相互独立的 Poisson 随机测度，并且 $(\mu^i)^p(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x) = \chi^{a_i}(x)\mathrm{d}s\mathrm{d}x$.

证明 由(4.7)可以推得(4.1)成立。又对任意的 α、β、γ、δ（$\alpha < \beta, \gamma < \delta$），

$$\begin{aligned} &(\mu_n)^p([0,t] \times (\Pi_i^{-1}([\alpha,\beta]) \cap \Pi_j^{-1}([\gamma,\delta])) \\ &= [nt]P\left(\xi_1 \in \left[\frac{\alpha}{n} + a_i, \frac{\beta}{n} + a_i\right] \cap \left[\frac{\gamma}{n} + a_j, \frac{\delta}{n} + a_j\right]\right), \end{aligned} \tag{4.10}$$

所以对 $a_i \neq a_j$，当 n 充分大时，$\left[\frac{\alpha}{n} + a_i, \frac{\beta}{n} + a_i\right] \cap$

$\left[\frac{\gamma}{n}+a_j,\frac{\delta}{n}+a_j\right]=\varnothing$，从而可知(4.10)的右端为0，这表明条件(4.2)成立. 故由定理5.4.1知结论(4.9)成立. 证毕.

通过考虑 $\min\{p_n^0(s):s\leqslant t,s\in D_{p_n}\}$ 和 $\max\{p_n^1(s):s\leqslant t,s\in D_{p_n}\},t\geqslant 0$，由定理5.4.2我们有如下的结论：

5.4.3 推论 对任意的 $\varepsilon>0$，在 $\boldsymbol{D}([\varepsilon,\infty);R^2)$ 上有

$$\left(n\min_{k\leqslant nt}\xi_k,n\max_{k\leqslant nt}\xi_k-n\right)\xrightarrow{\mathscr{L}}(X_t^0,X_t^1),\quad n\to\infty,$$

其中 $\boldsymbol{D}([\varepsilon,\infty);\boldsymbol{R}^2)$ 为定义在 $[\varepsilon,\infty]$ 上 $\boldsymbol{R}^2$-值右连左极函数的全体，并在其上赋予 Skorokhod 拓扑，X^0 和 X^1 独立，并且分别与 $\min\{p^0(s):s\leqslant t\}$ 和 $\max\{p^1(s):s\leqslant t\}$ 有相同的分布，$p^0(t)$ 和 $p^1(t)$ 分别为与 μ^0 和 μ^1 对应的 Poisson 点过程.

5.5 随机变量的和、最小值和最大值的极限定理

这一节我们将给出上一节中定理的应用，设 $\{\xi_{ni}\}_{i,n\geqslant 1}$ 和第三节中的相同，$\upsilon(\mathrm{d}x)$ 是 $(x_0,\infty)(x_0\geqslant-\infty)$ 上的无限 Borel 测度，并且对任意的 $x_1>x_0,\mu((x_1,\infty))<\infty$. 如果我们令 $\upsilon(\{\infty\})=0$，则 υ 是 $((x_0,\infty),\mathscr{B}((x_0,\infty)))$ 上的 Radon 测度. 假设对于某 $a_n>0,b_n\in\boldsymbol{R}$ 及 $\upsilon(\mathrm{d}x)$ 的任一连续点 x，我们有

$$\sum_{i\leqslant nt}P^n(\{a_n\xi_{ni}+b_n>x\,|\,\mathscr{F}_{i-1}^n\})\xrightarrow{P}t\upsilon((x,\infty)),\quad\forall\ t\geqslant 0,\tag{5.1}$$

则由定理5.3.1知由 $\{a_n\xi_{ni}+b_n\}_{i,n\geqslant 1}$ 构造的点过程 p_n 依分布收敛到跳测度的可料对偶投影为 $\mathrm{d}t\upsilon(\mathrm{d}x)$ 的 Poisson 点过程 p^0. 容易证明：对任意的 $\varepsilon>0$，在 $\boldsymbol{D}([\varepsilon,\infty),\boldsymbol{R})$ 上

$$M_t^n\triangleq a_n(\max_{i\leqslant nt}\xi_{ni})+b_n\xrightarrow{\mathscr{L}}M_t,\tag{5.2}$$

其中 $M_t=\max\{p^0(s):s\leqslant t\}$. 又假设存在 $((-\infty,x_1),$

$\mathscr{B}(-\infty,x_1))(x_1\leqslant\infty)$上的无限Borel测度$\bar{\upsilon}(\mathrm{d}x)$，使得对任意的$x<x_1$，$\bar{\upsilon}((-\infty,x))<\infty$，对于某序列$c_n>0$，$d_n\in\boldsymbol{R}$及$\bar{\upsilon}(\mathrm{d}x)$的连续点$x$，

$$\sum_{i\leqslant nt}P^n(\{c_n\xi_{ni}+d_n<x\,|\,\mathscr{F}^n_{i-1}\})\xrightarrow{P}t\,\bar{\upsilon}((-\infty,x)),\forall\ t>0. \tag{5.3}$$

因为$\min\xi_{ni}=-\max(-\xi_{ni})$，所以由(5.2)可以推得：对任意的$\varepsilon>0$，在$\boldsymbol{D}([\varepsilon,\infty);\boldsymbol{R})$上

$$m^n_t\triangleq c_n(\min_{i\leqslant nt}\xi_{ni})+d_n\xrightarrow{\mathscr{L}}m_t,\quad n\to\infty,$$

其中$m_t=\min\{p^1(s):s\leqslant t\}$，$p^1$是跳测度的可料对偶投影为$\mathrm{d}t\,\bar{\upsilon}(\mathrm{d}x)$的Poisson过程.

下面我们要研究(M^n,m^n)的联合极限．下述定理是推论5.4.3的推广.

5.5.1　定理　取υ、$\bar{\upsilon}$，M^n、M、m^n和m与上述相同．假设(5.1)和(5.3)成立，则

$$(M^n,m^n)\xrightarrow{\mathscr{L}}(\widetilde{M},\widetilde{m}),$$

其中$\widetilde{M}$和$\widetilde{m}$相互独立，并且分别与M和m同分布.

证明　已经证明每个分量的收敛性，只要证明$\widetilde{M}$和$\widetilde{m}$独立．下面考虑由$\{(a_n\xi_{ni}+b_n,c_n\xi_{ni}+d_n)\}_{i,n\geqslant1}$构成的点过程序列，按照定理5.4.1，只要证明对任意的$x>x_0$，$y<x_1$及$t\geqslant0$

$$\sum_{i\leqslant nt}P^n(\{a_n\xi_{ni}+b_n\geqslant x,c_n\xi_{ni}+d_n\leqslant y\,|\,\mathscr{F}^n_{i-1}\})\xrightarrow{P}0. \tag{5.4}$$

这是因为$[x,\infty](x>x_0)$是$(x_0,\infty]$的紧子集.(5.4)可以变为

$$\sum_{i\leqslant nt}P^n(\{(x-b_n)/a_n\leqslant\xi_{ni}\leqslant(y-d_n)/c_n\,|\,\mathscr{F}^n_{i-1}\})\xrightarrow{P}0. \tag{5.5}$$

假设$(x-b_n)/a_n\leqslant(y-d_n)/c_n$，则

$$[nt] \leqslant \sum_{i \leqslant nt} [P^n(\{\xi_{ni} \geqslant (x - b_n)/a_n | \mathscr{F}_{i-1}^n\}) + P^n(\{\xi_{ni} \leqslant (y - d_n)/c_n | \mathscr{F}_{i-1}^n\})].$$

而上式右端收敛于 $t[\upsilon((x,\infty)) + \bar{\upsilon}((-\infty,y))](<\infty)$，左端发散到无穷大，因此使 $(x-b_n)/a_n \leqslant (y-d_n)/c_n$ 的 n 只有有限多个. 故当 n 充分大时有 $(x-b_n)/a_n > (y-d_n)/c_n$. 这表明(5.5)成立. 证毕.

下面我们将讨论和式与最大值的联合收敛，以下假设定理 5.3.1 中的条件全部成立，并且存在 $\sigma \geqslant 0$，使得

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \limsup_{n\to\infty} P^n\Big(\Big\{\Big|\sum_{i \leqslant nt}\{E[(\xi_{ni}^\varepsilon)^2 | \mathscr{F}_{i-1}^n] - (E[\xi_{ni}^\varepsilon | \mathscr{F}_{i-1}^n])^2\} - \sigma^2 t\Big| \geqslant \delta\Big\}\Big) = 0, \quad \forall\, t \geqslant 0, \delta > 0. \tag{5.6}$$

如果 $\int \min(1,x^2)\,\bar{\upsilon}(\mathrm{d}x) < \infty$，我们有

$$\sum_{i \leqslant nt} \xi_{ni} - A_t^n \xrightarrow{\mathscr{L}} \sigma B_t + \int_0^t \int_{|x| \leqslant \tau} x\, \widetilde{\mu}\,(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x) + \int_0^t \int_{|x| > \tau} x \mu(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x), \tag{5.7}$$

其中 $A_t^n = \sum_{i \leqslant nt} E[\xi_{ni}^\tau | \mathscr{F}_{i-1}^n]$，$\mu$ 是可料对偶投影为 $\mathrm{d}t\, \bar{\upsilon}(\mathrm{d}x)$ 的 Poisson 随机测度，B 是与 μ 独立的一维标准 Brown 运动.（此处我们取 $\tau > 0$，使得 τ 和 $-\tau$ 均为 $\bar{\upsilon}(\mathrm{d}x)$ 的连续点. 按照 5.2 中的结论，我们有如下的定理.

5.5.2 定理 设 $\bar{\upsilon}(\mathrm{d}x)$ 是一个无限的 Borel 测度，并且 $\int 1 \wedge x^2\, \bar{\upsilon}(\mathrm{d}x) < \infty$. 如果(3.2)和(3.3)成立，则

$$\Big(\sum_{i \leqslant nt} \xi_{ni} - A_t^n, \max_{i \leqslant nt} \xi_{ni}\Big) \xrightarrow{\mathscr{L}} (X_t, Y_t), \quad n \to \infty,$$

其中 X 为(5.7)的右端，$Y_t = \sup\{p(s) : s \leqslant t\}$，$p$ 是跳测度的可料对偶投影为 $\mathrm{d}t\, \bar{\upsilon}(\mathrm{d}x)$ 的 Poisson 随机过程.

因为点过程 p 与 X 的不连续部分重合，所以 $Y_t =$

$\max\{\Delta X_s \vee 0 : s \leqslant t\}$. 这表明 Y 是 X 的一个泛函. 在 $\bar{\nu}(0,\infty)=0$ 的特殊情况下, 我们有 $Y_t=0, a.s.$ 因此在这种情况下, 我们可以选取适当的 $a_n>0$ 和 b_n 使得(5.1)成立, 最大值过程就不再是局部和过程序列极限的泛函. 事实上, 我们有如下的结论.

5.5.3 定理 假设 $\bar{\nu}$ 为 $(\boldsymbol{R}\backslash\{0\}, \mathscr{B}(\boldsymbol{R}\backslash\{0\}))$ 上的 Borel 测度, $\bar{\nu}((0,\infty))=0$, $\int_{-\infty}^{0} 1 \wedge x^2\, \bar{\nu}(\mathrm{d}x)<\infty$. ν 为 $((x_0,\infty), \mathscr{B}((x_0,\infty)))(x_0 \geqslant -\infty)$ 上的 Borel 测度, 使得对任意的 $x>x_0$, $\nu((x,\infty))<\infty$, 在定理 5.3.1 的条件下, 如果对某些 $a_n>0, b_n \in \boldsymbol{R}$ 及 $\sigma \geqslant 0$, (5.1) 和 (5.6) 成立, 则对任意的 $\varepsilon>0$, 在 $\boldsymbol{D}([\varepsilon,\infty);\boldsymbol{R}^2)$ 上

$$\left(\sum_{i\leqslant nt}\xi_{ni}-A_t^n, a_n \max_{i\leqslant nt}\xi_{ni}+b_n\right) \xrightarrow{\mathscr{L}} (X_t, Y_t),$$

其中 X 和 Y 相互独立, 并且分别与(5.7)的右端和(5.2)中的 M 有相同的分布.

证明 为了简化证明, 我们假设 $x_0=-\infty$. 对于一般情形, 证明方法基本相同. 定义 $(\boldsymbol{R}\backslash\{0\}) \times (x_0,\infty]$-值点过程 p_n 为: $p_n\left(\frac{i}{n}\right)=(\xi_{ni}, a_n\xi_{ni}+b_n), i \geqslant 1, n \geqslant 1$, 根据假设条件可知(4.1)成立. 又对任意的 $\alpha>0, \beta<0$ 及 $\gamma>x_0$, 由假设条件(3.2)和 $\bar{\nu}((0,\infty))=0$ 可得

$$\sum_{i\leqslant nt} P^n(\{\xi_{ni}\in[\alpha,\infty) \mid \mathscr{F}_{i-1}^n\}) \xrightarrow{P} t\,\bar{\nu}([\alpha,\infty))=0.$$

从而有

$$\sum_{i\leqslant nt} P^n(\{\xi_{ni}\in[\alpha,\infty), a_n\xi_{ni}+b_n\in[\gamma,\infty) \mid \mathscr{F}_{i-1}^n\}) \xrightarrow{P} 0. \tag{5.8}$$

利用定理 5.5.1 证明 $(x-b_n)/a_n>(y-d_n)/c_n$ 的思想方法可以证明当 n 充分大时, $\beta<(\gamma-b_n)/a_n$. 所以我们有

$$\sum_{i\leqslant nt} P^n(\{\xi_{ni}\in(-\infty,\beta], a_n\xi_{ni}+b_n\in[\gamma,\infty) \mid \mathscr{F}_{i-1}^n\}) \xrightarrow{P} 0.$$

$$(5.9)$$

(5.8)和(5.9)表明条件(4.2)成立. 故由定理5.4.1知命题成立. 证毕.

6 实值鞅测度

1986年，J. B. Walsh在研究随机偏微分方程时，提出了鞅测度的概念，并对鞅测度的基本性质进行了讨论．1990年，N. El Karoui和S. Méléard研究了关于鞅测度的随机积分、鞅测度的表现定理及鞅问题．1994年，本书作者研究了正交的F-鞅测度及正交的R-鞅测度的可料特征的存在性，独立增量鞅测度与其可料特征的关系．在本章中，我们首先给出鞅测度的定义，并讨论鞅测度的基本性质(6.1～6.5)．在6.6中，我们讨论了正交的F-鞅测度和正交的R-鞅测度的可料特征的存在性及独立增量鞅测度的基本性质．在6.7中，我们研究鞅测度的表示定理．最后给出鞅问题的讨论．本章主要取材于[9,38,43]．

6.1 定义及例子

设$(S,\mathscr{B}(S))$是一个Lusin空间，即S是某一紧距离空间的Borel子空间，$\mathscr{B}(S)$是S的Borel σ-域，$(\Omega,\mathscr{F},P)$是一概率空间．$U(\omega,A)$是定义在$\Omega\times\mathscr{A}$上的函数，并且满足：

$$\|U(A)\|_2^2 = E[U(A)^2] < \infty, \quad \forall A \in \mathscr{A},$$

$$A \cap B = \varnothing \Rightarrow U(A) + U(B) = U(A \cup B), a.s., \quad \forall A, B \in \mathscr{A},$$

其中 $\mathscr{A}$ 是 $\mathscr{B}(S)$ 的子环．如果存在 S 的单调递增子集列 $\{S_n\}_{n\geq 1}$ 使得

(Ⅰ) $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} S_n = S$,

(Ⅱ) $\mathscr{B}(S_n) = \mathscr{B}(S) \cap S_n \subset \mathscr{A}, \forall n \geq 1$,

(Ⅲ) $\sup\{\|U(A)\|_2 : A \in \mathscr{B}(S_n)\} < \infty$,

则称 U 是 σ- 有限的. 定义 $\mu(A) = \|U(A)\|_2^2$. 如果对任意的 $n \geq 1$，存在 $A_j \in \mathscr{B}(S_n)$ 使得 $\lim\limits_{j\to\infty}\mu(A_j) = 0$，则称 U 是 $\mathscr{B}(S_n)$ 上的可列可加的 L^2- 值测度．

如果 U 是 $\mathscr{B}(S_n)$ 上的可列可加的 L^2- 值测度，我们可以进行如下扩张：对任意的 $A \in \mathscr{B}(S)$，如果作为 $L^2(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 上的极限 $\lim\limits_{n\to\infty} U(A \cap S_n)$ 存在，定义 $U(A) = \lim\limits_{n\to\infty} U(A \cap S_n)$. 以下我们讨论的可列可加集函数都是用这种方法扩张的，称这种 U 为 σ- 有限的 L^2- 值测度.

6.1.1 设 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 为一概率空间，$(\mathscr{F}_t)_{t\geq 0}$ 为右连续的 $\mathscr{F}$ 子 σ- 域流. $\{M_t(A), t \geq 0, A \in \mathscr{A}\}$ 称为 $\mathscr{F}_t$- 鞅测度，如果下列条件成立：

(Ⅰ) $M_0(A) = 0, \forall A \in \mathscr{A}$,

(Ⅱ) 对任意的 $t > 0$, M_t 是 σ- 有限的 L^2- 值测度，

(Ⅲ) 对任意的 $A \in \mathscr{A}$, $(M_t(A))_{t\geq 0}$ 是 $\mathscr{F}_t$- 鞅.

6.1.2 例子 设 N 是 σ- 有限的 L^2- 值测度，$(\mathscr{F}_t)_{t\geq 0}$ 是 $\mathscr{F}$ 的右连续子 σ- 域流，令

$$M_t(A) = E(N(A) | \mathscr{F}_t) - E(N(A) | \mathscr{F}_0), t \geq 0, A \in \mathscr{A},$$

则 M 是 $\mathscr{F}_t$- 鞅测度.

6.1.3 定义 设 M 是 S 上的鞅测度，如果对任意的 A

$\in \mathscr{A}$，$M_t(A)$ 是连续鞅，则称 M 是连续的．

存在两种完全不同类型的鞅测度，一种是正交鞅测度，另一种是核协方差鞅测度．

6.1.4 定义 1) 设 M 是一个鞅测度，称 M 是正交的，如果对任意的 A、$B \in \mathscr{A}$，$A \cap B = \varnothing$，实值鞅 $M(A)$ 和 $M(B)$ 正交．等价地，$M(A)M(B)$ 是鞅，这又等价于 $\langle M(A), M(B)\rangle = 0$.

2) 鞅测度 M 称为是强正交的，如果对任意的 A、$B \in \mathscr{B}(S)$，$A \cap B = \varnothing$，都有鞅 $M(A)$ 和 $M(B)$ 的方括号过程 $[M(A), M(B)] = 0$.

显然，强正交鞅测度一定是正交鞅测度．

6.1.5 定义 设 M 是一个鞅测度，称 M 是核协方差的，如果存在 $(S, \mathscr{B}(S))$ 上的有限测度 η 及 $L^2(S, \mathscr{B}(S), \eta)$ 的完全正交基 $\{\Phi_k\}_{k\geq 1}$，使得 $\forall\ A \in \mathscr{B}(S)$，$\eta(A) = 0 \Rightarrow \mu(A) = 0$，并且

$$\sum_{k=1}^{\infty} E[M_t^2(\Phi_k)] < \infty,$$

其中 $M_t(\Phi_k) = \int_S \Phi_k(x) M_t(\mathrm{d}x)$ 是 Bochner 积分，$\mu(A) = \| M_\infty(A) \|^2$.

正交鞅测度的一个经典的例子是白噪声．

设 $(E, \mathscr{B}(E), \upsilon)$ 是 σ- 有限测度空间，基于 υ 的白噪声是一个定义在 υ 有限测度集上的随机集函数 W，具有如下性质：

（Ⅰ）$W(A)$ 是服从正态分布 $N(0, \upsilon(A))$ 的随机变量，

（Ⅱ）如果 $A \cap B = \varnothing$，则 $W(A)$ 和 $W(B)$ 独立，并且有 $W(A \cup B) = W(A) + W(B)$.

假设 W 是 $R_+ \times S$ 上的白噪声测度．令 $M_t = W([0,t] \times A)$，显然 M 是鞅测度．如果 $A \cap B = \varnothing$，则 $M_t(A)$ 和 $M_t(B)$ 是相互独立的 Brown 运动．因此 $M(A)$ 和 $M(B)$ 正交．以后仍称由这种方法导出的鞅测度为白噪声．

设$(S,\mathscr{B}(S),\eta)$是有限测度空间，$f\in L^2(S,\mathscr{B}(S),\eta)$，$B$是一维标准 Brown 运动．定义

$$M_t(A)=B_t\int_A f(x)\eta(\mathrm{d}x),$$

则M是核协方差鞅测度．事实上，因为对$L^2(S,\mathscr{B}(S),\eta)$的任一组正交基$\{\Phi_k\}_{k\geqslant 1}$，我们有$\sum_k E[M_t^2(\Phi_k)]=t\|f\|_2^2$．更一般地，设$B^1,B^2,\cdots$是一列独立的标准 Brown 运动，$\{a_n\}_{n\geqslant 1}$是实数列，且满足$\sum_{k=1}^{\infty}a_k^2<\infty$，则

$$M_t(A)=\sum_{k=1}^{\infty}a_kB_t^k\int_A\Phi_k(x)\eta(\mathrm{d}x)$$

是核协方差鞅测度．

容易证明，当S是有限集时，S上的白噪声是核协方差的．

6.2 有价值鞅测度

因为不是对于所有鞅测度都能定义随机积分(反例见 6.9)，所以我们必须对鞅测度附加一定的条件，虽然这些条件比较苛刻，但对于正交鞅测度及核协方差鞅测度，这些条件被满足．

设M是σ-有限鞅测度，如果必要，我们可以把它限制在S_n上，因此我们可以假设M是有限的．同时，我们也把时间限制在有限区间$[0,T]$上．拓广到无限测度及区间$[0,\infty)$上是常规的方法．

6.2.1 定义 设M是鞅测度，定义M的协方差泛函为

$$\overline{Q}_t(A,B)=\langle M(A),M(B)\rangle_t,\quad A,B\in\mathscr{A}.$$

由定义我们可以看到$\overline{Q}_t$是关于A和B对称，并且关于每个变元可加，即对固定的$A\in\mathscr{A}$，$\overline{Q}_t(A,\cdot)$和$\overline{Q}_t(\cdot,A)$都是可加集函数．事实上，如果$B\cap C=\varnothing$，则

$$\overline{Q}_t(A,B\cup C)=\langle M(A),M(B\cup C)\rangle_t$$

$$= \langle M(A), M(B) + M(C) \rangle_t$$
$$= \langle M(A), M(B) \rangle_t + \langle M(A), M(C) \rangle_t$$
$$= \overline{Q}_t(A,B) + \overline{Q}_t(A,C).$$

进而由半鞅理论可得

$$|\overline{Q}_t(A,B)| \leqslant [\overline{Q}_t(A,A)]^{1/2}[\overline{Q}_t(B,B)]^{1/2}.$$

称形如 $A \times B \times (s,t] \subset S \times S \times R_+$ 的集为矩形集. 定义

$$Q(A \times B \times (s,t]) = \overline{Q}_t(A,B) - \overline{Q}_s(A,B)$$

及

$$Q\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i \times B_i \times (s_i,t_i]\right) = \sum_{i=1}^{n}\left[\overline{Q}_{t_i}(A_i,B_i) - \overline{Q}_{s_i}(A_i,B_i)\right], \tag{2.1}$$

其中 $A_i \times B_i \times (s_i,t_i], i = 1,2,\cdots,n$ 为互不相交的矩形集. 容易证明 Q 的定义是有意义的(详细证明留给读者).

如果 $a_1,\cdots,a_n \in \mathbf{R}, A_1,\cdots,A_n \in \mathscr{B}(S)$ 互不相交, 则对任意的 $t > s$,

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i a_j Q(A_i \times A_j \times (s,t]) \geqslant 0. \tag{2.2}$$

这是因为

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i a_j Q(A_i \times A_j \times (s,t])$$
$$= \sum_{i,j=1} a_i a_j [\langle M(A_i), M(A_j) \rangle_t - \langle M(A_i), M(A_j) \rangle_s]$$
$$= \left\langle \sum_{i=1}^{n} a_i (M_t(A_i) - M_s(A_i)), \sum_{i=1}^{n} a_i (M_t(A_i) - M_s(A_i)) \right\rangle$$
$$\geqslant 0.$$

6.2.2 定义 $\mathscr{B}_+ \times \mathscr{B}(S) \times \mathscr{B}(S)$ 上的符号测度 $K(\mathrm{d}s, \mathrm{d}x, \mathrm{d}y)$ 称为正定的, 如果对每个使得积分有意义的有界可测函数 f,

$$\int_{R_+\times S\times S} f(s,x)f(s,y)K(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x,\mathrm{d}y) \geqslant 0. \tag{2.3}$$

对于正定的符号测度 K，定义

$$(f,g)_K = \int_{R_+\times S\times S} f(s,x)g(s,y)K(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x,\mathrm{d}y).$$

(2.3) 表明$(f,f)_K \geqslant 0$.

假设 K 关于 $\mathrm{d}x$ 和 $\mathrm{d}y$ 对称，则有 Schwartz 不等式

$$|(f,g)_K| \leqslant (f,f)_K^{1/2}(g,g)_K^{1/2} \tag{2.4}$$

及 Minkowski 不等式

$$(f+g,f+g)_K^{1/2} \leqslant (f,f)_K^{1/2} + (g,g)_K^{1/2} \tag{2.5}$$

成立.

因为不是所有的 Q 都能扩张成 $\mathscr{B}_+ \times \mathscr{B}(S) \times \mathscr{B}(S)$ 上的测度(请参见 6.9 中的例子)，所以我们引进下面的定义：

6.2.3 定义 鞅测度 M 称为有价值的，如果存在一个 σ-有限的随机测度 $K(\omega,\Lambda),\omega\in\Omega,\Lambda\in\mathscr{B}_+\times\mathscr{B}(S)\times\mathscr{B}(S)$，使得

(Ⅰ) K 是关于 $\mathrm{d}x$ 和 $\mathrm{d}y$ 对称的正定测度，

(Ⅱ) 对任意的 A、$B\in\mathscr{B}(S)$，$(K((0,t]\times A\times B))_{t\geqslant 0}$ 是可料过程，

(Ⅲ) 对每个 n，$E[K([0,T]\times S_n\times S_n)]<\infty$，

(Ⅳ) 对每个矩形集 Λ，$|Q(\Lambda)|\leqslant K(\Lambda)$.

我们称 K 是 M 的控制测度.

在上述定义中，K 是对称的要求并非本质的. 事实上，如果 K 不对称，我们可以用 $K(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x,\mathrm{d}y)+K(\mathrm{d}s,\mathrm{d}y,\mathrm{d}x)$ 代 $K(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x,\mathrm{d}y)$. 除去对称性要求之外，$K$ 是加在 M 上的一个很强的条件. 对于上述两种特殊的鞅测度，我们将证明其存在控制测度，即正交鞅测度和核协方差鞅测度都是有价值鞅测度.

如果 M 是有价值鞅测度，Q 和 K 分别为其协方差测度和控制测度，则 $K+Q$ 是一个正的集函数. 由 σ-域 $\mathscr{B}(S)$ 的可分性，限制

在 $\mathscr{B}_+ \times \mathscr{B}(S) \times \mathscr{B}(S)$ 的可数子代数上，Q 是 $a.s.$ 有限可加的，从而 $K+Q$ 是非负有限可加集函数，并且被 $2K$ 控制，因此可以扩张成为一个测度，特别地，对 $a.s.\omega \in \Omega$，Q 可以扩张成 $\mathscr{B}_+ \times \mathscr{B}(S) \times \mathscr{B}(S)$ 上的符号测度，对任意的 $A \in \mathscr{B}_+ \times \mathscr{B}(S) \times \mathscr{B}(S)$，$Q$ 在 A 上的全变差 $|Q|(A) \leqslant K(A)$. 由(2.2)知 Q 将是正定的.

记 $\Delta(S) = \{(x,x): x \in S\}$. 称 $\Delta(S)$ 为 $S' \times S'$ 的对角线.

6.2.4 性质 一个有价值鞅测度 M 是正交的充要条件是 Q 的支集为 $\boldsymbol{R}_+ \times \Delta(S)$.

证明 因为 $Q([0,t] \times A \times B) = \langle M(A), M(B)\rangle_t$. 所以当 M 正交时，对于 $A \cap B = \varnothing$，$Q([0,t] \times A \times B) = 0$，因此 $|Q|(\boldsymbol{R}_+ \times [S \times S - \Delta(S)]) = 0$，$a.s.$ 即 $\mathrm{supp}(Q) \subset \boldsymbol{R}_+ \times \Delta(S)$，反之，若对任意的 $A \cap B = \varnothing$，$Q([0,t] \times A \times B) = 0$，则显然有 M 正交. 证毕.

6.3 随机积分

设 M 是 Lusin 空间$(S, \mathscr{B}(S))$上的有价值鞅测度，Q 和 K 分别为 M 的协方差测度和控制测度.

在随机分析中，定义随机积分是作为一个随机过程，而不是随机变量. 例如$\left(\int_0^t f(s)\mathrm{d}B_s\right)_{t\geqslant 0}$是鞅，本节我们要定义的随机积分是鞅测度. 以下我们限制在有限时间区间$[0,T]$及某个 S_n 上，使得鞅测度 M 有限. 和通常的方法一样，我们首先定义初等函数的积分，然后定义简单函数的积分，最后给出一般函数积分的定义.

6.3.1 定义 函数 $f(\omega,s,x)$ 称为是初等的，如果它具有形式

$$f(\omega,s,x) = X(\omega)I_{(a,b]}(s)I_A(x) \tag{3.1}$$

其中 $0 \leqslant a < b$，X 是 $\mathscr{F}_a$- 可测的有界随机变量，$A \in \mathscr{B}(S)$. 如果 f 是有限多个初等过程的线性组合，则称 f 是简单过程. 简单过程的全体记为 $\mathscr{S}$.

由定义可知初等过程及简单过程都是可料的.

对于可料过程 f，定义

$$\| f \|_M = \{E[(|f|,|f|)_K]\}^{1/2}$$

则有

$$(f,f)_Q \leqslant \| f \|_M^2.$$

记

$$\widetilde{\mathscr{P}}_M = \{f \in \widetilde{\mathscr{P}}, \| f \|_M < \infty\}.$$

6.3.2　性质　设 $f \in \widetilde{\mathscr{P}}_M$，$A = \{(s,x):|f(s,x)| \geqslant \varepsilon\}$，则

$$E[K([0,T] \times A \times S)]$$
$$\leqslant \frac{1}{\varepsilon} \| f \|_M \{E[K([0,T] \times S \times S)]\}^{1/2}$$

证明　由 Schwartz 不等式(2.4) 可得：

$$\varepsilon E[K([0,T] \times A \times S)]$$
$$\leqslant E\left[\iint |f(t,x)| K(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x,\mathrm{d}y)\right.$$
$$= E[(|f|,1)_K]$$
$$\leqslant E[(|f|,|f|)_K^{1/2}\{K([0,T] \times S \times S)]\}^{1/2}$$
$$\leqslant \| f \|_M \{E[K([0,T] \times S \times S)]\}^{1/2}.$$

利用性质 6.3.2 可以证明 $\widetilde{\mathscr{P}}_M$ 是完备的赋范空间，因此 $\widetilde{\mathscr{P}}_M$ 是 Banach 空间，详细证明请读者完成.

6.3.3　性质　$\mathscr{S}$ 在 $\widetilde{\mathscr{P}}_M$ 中稠密.

证明　任取 $f \in \widetilde{\mathscr{P}}_M$，令

$$f_n(s,x) = \begin{cases} f(s,x), & \text{如果 } |f(s,x)| \leqslant n, \\ 0, & \text{如果 } |f(s,x)| > n, \end{cases}$$

则由控制收敛定理

$$\| f - f_n \|_M^2 = E\left[\int_{R_+ \times S \times S} |f(s,x) - f_n(s,x)| \cdot |f(s,y) - f_n(s,y)| K(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x,\mathrm{d}y)\right] \to 0.$$

因此有界过程在$\widetilde{\mathscr{P}}_M$中稠密. 又容易证明初等过程在跳过程的集合中稠密. 下面只要证明跳过程的集在有界过程的集中稠密.

不失一般性,假设$K(\mathrm{d}s \times S \times S)$关于Lebesgue测度绝对连续,设$f$是有界可料过程,令

$$f_n(\omega,s,x) = 2^{-1}\int_{(k-1)/2^n}^{k/2^n} f(\omega,u,x)\mathrm{d}u, \quad k/2^n \leqslant s < (k+1)/2^n.$$

由Lebesgue定理,对$a.s.\, t \geqslant 0$,我们有$f_n(\omega,t,x) \to f(\omega,t,x)$. 由此易证得$\| f - f_n \|_M \to 0$. 证毕.

下面我们来定义关于鞅测度M的随机积分. 对于初等过程$f(\omega,s,x) = X(\omega)I_{(a,b]}(s)I_A(x)$,令

$$f.M_t(B) = X(\omega)[M_{t\wedge b}(A \cap B) - M_{t\wedge a}(A \cap B)], \quad B \in \mathscr{B}(S). \tag{3.2}$$

则$f.M$是一个鞅测度.

6.3.4 引理 $f.M$是有价值鞅测度,其协方差测度和控制测度分别为

$$Q_{f.M}(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x,\mathrm{d}y) = f(s,x)f(s,y)Q(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x,\mathrm{d}y), \tag{3.3}$$

$$K_{f.M}(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x,\mathrm{d}y) = |f(s,x)f(s,y)|K(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x,\mathrm{d}y), \tag{3.4}$$

并且

$$E[f.M_t(B)]^2 \leqslant \| f \|_M^2, \quad \forall B \in \mathscr{B}(S), t \leqslant T. \tag{3.5}$$

证明 因为$X \in \mathscr{F}_a$,所以对任意的$B \in \mathscr{B}(S)$,$f.M(B)$是适应的平方可积鞅,由(3.2)可知在L^2中,$B \to f.M_t(B)$具有可列可加性. 因为

$$
\begin{aligned}
& f.M_t(B)f.M_t(C) - \int_{[0,t]\times B\times C} f(s,x)f(s,y)Q(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x,\mathrm{d}y) \\
&= X^2\{[M_{t\wedge b}(A\cap B) - M_{t\wedge a}(A\cap B)][M_{t\wedge b}(A\cap C) \\
&\quad - M_{t\wedge a}(A\cap C)] - \langle M(A\cap B),M(A\cap C)\rangle_{t\wedge b} \\
&\quad + \langle M(A\cap B),M(A\cap C)\rangle_{t\wedge a}\}
\end{aligned}
$$

是鞅，所以(3.3)成立. 因为$K_{f.M}$是非负的正定测度，所以(3.4)成立. 又

$$
\begin{aligned}
E[f.M_t(B)]^2 &= E\langle f.M(B),f.M(B)\rangle_t \\
&= E[X^2(\langle M(A\cap B),M(A\cap B)\rangle_{t\wedge b} \\
&\quad - \langle M(A\cap B),M(A\cap B)\rangle_{t\wedge a})] \\
&= E[X^2Q((a,b\wedge t]\times(A\cap B)\times(A\cap B))] \\
&\leqslant E[X^2K((a,b]\times(A\cap B)\times(A\cap B)] \\
&\leqslant \|f\|_M^2
\end{aligned}
$$

即(3.5)成立. 证毕.

对于$f\in\mathscr{S}$，利用线性运算定义$f.M$. 类似于引理6.3.4的证明可知：对于$f\in\mathscr{S}$，(3.3)、(3.4)和(3.5)仍然成立.

设$f\in\widetilde{\mathscr{P}}_M$，由性质6.3.3存在$\{f_n\}_{n\geqslant1}\subset\mathscr{S}$，使得$\|f_n - f\|_M\to0$. 如果$A\in\mathscr{B}(S)$，$t\leqslant T$，由(3.5)

$$
E[(f_m.M_t(A)-f_n.M_t(A))^2]\leqslant\|f_m-f_n\|_M\to0,\quad m,n\to\infty.
$$

这表明$\{f_n.M_t(A)\}_{n\geqslant1}$是$L^2(\Omega,\mathscr{F},P)$中的Cauchy序列. 因此在$L^2(\Omega,\mathscr{F},P)$中$\{f_n.M_t(A)\}_{n\geqslant1}$收敛到一个鞅，记为$f.M_t(A)$. 容易证明$f.M_t(A)$与序列$\{f_n\}_{n\geqslant1}$的选取无关. 所以我们定义$f.M(A)$为$f$关于$M(A)$的随机积分.

6.3.5　定理　如果$f\in\widetilde{\mathscr{P}}_M$，则$f.M$是一个有价值鞅测度. 当$M$正交时，$f.M$也正交. $f.M$的协方差测度和控制测度分别为

$$
Q_{f.M}(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x,\mathrm{d}y) = f(s,x)f(s,y)Q(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x,\mathrm{d}y), \tag{3.6}
$$

$$K_{f.M}(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x,\mathrm{d}y) = |f(s,x)f(s,y)|K(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x,\mathrm{d}y). \quad (3.7)$$

如果 $g \in \widetilde{\mathscr{P}}_M, A, B \in \mathscr{B}(S)$，则有

$$\langle f.M(A), g.M(B)\rangle_t = \int_{[0,t]\times A\times B} f(s,x)g(s,y)Q(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x,\mathrm{d}y), \quad (3.8)$$

$$E[f.M_t(A)]^2 \leqslant \|f\|_M^2. \quad (3.9)$$

证明　取序列 $\{f_n\}_{n\geqslant 1} \subset \mathscr{S}$，使得 $\|f_n - f\|_M \to 0$. 由于 $f.M(A)$ 是平方可积鞅序列 $\{f_n.M(A)\}_{n\geqslant 1}$ 的 L^2- 极限，所以 $f.M(A)$ 是平方可积鞅，对任意的 $n \geqslant 1$，

$$f_n.M_t(A)f_n.M_t(B) - \int_{[0,t]\times A\times B} f_n(s,x)f_n(s,y)Q(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x,\mathrm{d}y) \quad (3.10)$$

是鞅. 因为 $f_n.M(A)$ 和 $f_n.M(B)$ 都是 L^2- 收敛的，所以它们的乘积 $f_n.M(A)f_n.M(B)$ 是 L^1- 收敛，又由 Schwartz 不等式得

$$\begin{aligned}
&E\Big[\Big|\int_{[0,t]\times A\times B}[f_n(s,x)f_n(s,y) - f(s,x)f(s,y)]\\
&\quad\cdot Q(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x,\mathrm{d}y)\Big|\Big]\\
&\leqslant E\Big[\int_{[0,t]\times S\times S}|f_n(s,x)||f_n(s,y) - f(s,y)|K(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x,\mathrm{d}y)\Big]\\
&\quad + E\Big[\int_{[0,t]\times S\times S}|f_n(s,x) - f(s,x)||f(s,y)|K(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x,\mathrm{d}y)\Big]\\
&\leqslant E[(|f_n|,|f-f_n|)_K + (|f-f_n|,|f|)_K]\\
&\leqslant [\|f_n\|_M + \|f\|_M]\|f_n - f\|_M \to 0, \quad n\to\infty.
\end{aligned}$$

所以(3.10) 所表示的鞅 L^1- 收敛到鞅

$$f.M_t(A)\cdot f.M_t(B) - \int_{[0,t]\times A\times B} f(s,x)f(s,y)Q(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x,\mathrm{d}y).$$

因此 $\langle f.M(A), f.M(B)\rangle_t = \int_{[0,t]\times A\times B} f(s,x)f(s,y)Q(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x,\mathrm{d}y).$

这表明(3.6)成立，从而(3.7)成立. 这也证明了在$f=g$时，(3.8)成立，对于$f\neq g$，只要利用极化恒等式即可证得(3.8). 由(3.7)可推得(3.9)成立.

要证明$f.M$是鞅测度，必须验证可列可加性. 设$A_n\subset S, n\geqslant 1, A_n\downarrow\varnothing$，则对于任意的$t$，由单调收敛定理得

$$E[f.M_t(A_n)]^2$$
$$\leqslant E\left[\int_{[0,t]\times A_n\times A_n}|f(s,x)f(s,y)|K(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x,\mathrm{d}y)\right]\rightarrow 0.$$

假设M是正交鞅测度，则$Q(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x,\mathrm{d}y)$的支集为$[0,T]\times\Delta(S)$，因此由(3.6)知$Q_{f.M}$的支集也是$[0,T]\times\Delta(S)$，从而由性质6.2.4知$f.M$也是正交的. 证毕.

我们已经把随机积分定义成为鞅测度，一般的随机积分我们定义为

$$\int_{[0,t]\times A}f(s,x)M(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)=f.M_t(A),$$

而

$$\int_{R_+\times S}f(s,x)M(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)=\lim_{t\to\infty}f.M_t(S).$$

在重积分中，积分交换次序是非常重要的. 下面我们给出随机Fubini定理，它将是非常有用的.

设$(G,\mathscr{G},\mu)$是有限测度空间，M是一个鞅测度，其控制测度为$K(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x,\mathrm{d}y)$.

6.3.6 定理 设$f(\omega,s,x,\lambda)$是$\widetilde{\mathscr{P}}\times\mathscr{G}$-可测函数，并且

$$E\left[\int_{[0,T]\times S\times S\times G}|f(\omega,s,x,\lambda)f(\omega,s,y,\lambda)|K(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x,\mathrm{d}y)\mu(\mathrm{d}\lambda)\right]<\infty, \tag{3.11}$$

则

$$\int_G \left[\int_{[0,t]\times S} f(s,x,\lambda) M(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x) \right] \mu(\mathrm{d}\lambda)$$

$$= \int_{[0,t]\times S} \left[\int_G f(s,x,\lambda)\mu(\mathrm{d}\lambda) \right] M(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x). \tag{3.12}$$

证明　如果 $f(\omega,s,x,\lambda) = X(\omega) I_{(a,b]}(s) I_A(x) g(\lambda)$，那么 (3.12) 左右两端都等于

$$X[M_{t\wedge b}(A) - M_{t\wedge a}(A)] \int_G g(\lambda)\mu(\mathrm{d}\lambda).$$

利用积分的线性性，对形如上述 f 的有限和，(3.12) 仍然成立. 设 $f \in \widetilde{\mathscr{P}} \times \mathscr{G}$，并且满足(3.11)，利用性质 6.3.3 相同的方法可以证明存在序列 $\{f_n\}_{n\geq 1}$，使得

$$E\Big[\int |f(s,x,\lambda) - f_n(s,x,\lambda)| \, |f(s,y,\lambda), - f_n(s,y,\lambda)|$$

$$\cdot K(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x,\mathrm{d}y)\mu(\mathrm{d}\lambda)\Big]$$

$$= \int \| f(\cdot,\lambda) - f_n(\cdot,\lambda) \|_M^2 \mu(\mathrm{d}\lambda) \to 0. \tag{3.13}$$

注意到(3.12) 右端方括号内的积分是 $\widetilde{\mathscr{P}}$ 可测的，因此积分有意义，并且 $\left\| \int_G f(\cdot,\lambda)\mu(\mathrm{d}\lambda) \right\|_M < \infty$.

由 $\| f(\cdot,\lambda) - f_n(\cdot,\lambda) \|_M \to 0$,　$n \to \infty$, η-$a.s.\ \lambda$, (如果必要的话，我们可以取子序列) 可以推得对 $a.s.\ \lambda \in G$, $\int f_n(s,x,\lambda) M(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)$ 按 L^2- 收敛于 $\int f(s,x,\lambda) M(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)$. 从而对 $a.s.\ \lambda \in G$, $\int f_n(s,x,\lambda) M(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)$ 依概率 P 收敛于 $\int f(s,x,\lambda) M(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)$. 由 Fubini 定理可知 $\int f_n(\omega,s,x,\lambda) M(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)$ 依测度 $\mu \times P$ 收敛于 $\int f(\omega,s,x,\lambda) M(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)$. 因此 $\int f(\omega,s,x,\lambda) M(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)$ 是关于 (ω,λ) 可测的. 这表明对于任意固定的 $\omega \in \Omega$, $\int f(\omega,s,$

$x,\lambda)M(\omega,\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)$ 是关于 λ 可测的，即(3.12) 左端的积分有意义.

令 $g_n = f - f_n$，则由 Schwartz 不等式得

$$\left\| \int g_n(\cdot,\lambda)\mu(\mathrm{d}\lambda) \right\|_M$$

$$= E\left[\int\limits_{[0,T]\times S\times S} \int_G g_n(s,x,\lambda)\mu(\mathrm{d}\lambda) \cdot \int_G g_n(s,y,\lambda')\mu(\mathrm{d}\lambda')K(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x,\mathrm{d}y) \right]$$

$$= \int\limits_{G\times G} E[(g_n(\cdot,\lambda),g_n(\cdot,\lambda'))_K]\mu(\mathrm{d}\lambda)\mu(\mathrm{d}\lambda')$$

$$\leqslant \int\limits_{G\times G} E[(|g_n(\cdot,\lambda)|,|g_n(\cdot,\lambda)|)_K]^{1/2} \cdot E[(|g_n(\cdot,\lambda')|,|g_n(\cdot,\lambda')|)_K]^{1/2}\mu(\mathrm{d}\lambda)\mu(\mathrm{d}\lambda')$$

$$= \left(\int_G \| g_n(\cdot,\lambda) \|_M \mu(\mathrm{d}\lambda) \right)^2$$

$$\leqslant \mu(G)\int_G \| f(\cdot,\lambda) - f_n(\cdot,\lambda) \|_M^2 \mu(\mathrm{d}\lambda).$$

由(3.13) 知上述不等式右端趋于 0.

又由于

$$E\left[\int_G \left(\int g_n(s,x,\lambda)M(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x) \right)^2 \mu(\mathrm{d}x) \right]$$

$$= \int_G E\left[\int g_n(s,x,\lambda)M(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x) \right]^2 \mu(\mathrm{d}\lambda)$$

$$\leqslant \int_G \| f(\cdot,\lambda) - f_n(\cdot,\lambda) \|_M^2 \mu(\mathrm{d}\lambda) \to 0,$$

所以对 $a.s.\ \omega \in \Omega$，$\int_G \left(\int g_n(\omega,s,x,\lambda)M(\omega,\mathrm{d}s,\mathrm{d}x) \right)^2 \mu(\mathrm{d}\lambda) \to 0$，即

$$\int_G \left[\int (f(s,x,\lambda) - f_n(s,x,\lambda))M(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x) \right]^2 \mu(\mathrm{d}\lambda) \to 0.$$

而对于 f_n，(3.12) 成立，由上述所证知对于 f，(3.12) 也成立. 证毕.

6.4 正交鞅测度

设 M 是 S 上的正交鞅测度. 对任意的 $A\in\mathscr{A}$,则存在一个与局部平方可积鞅 $M(A)$ 相联系的可料增过程 $\langle M(A)\rangle$. 以下我们把注意力放在有限区间 $[0,T]$ 上,并假设 $S=S_n$,则 M 就是有限鞅测度,如果我们定义

$$\mu(A)=E[M_T(A)]^2=E[\langle M(A)\rangle_T],$$

则下列性质成立:

1° $\langle M(\cdot)\rangle_t$ 是可加集函数,即

$$A\cap B=\varnothing\Rightarrow\langle M(A\cup B)\rangle_t=\langle M(A)\rangle_t+\langle M(B)\rangle_t,P\text{-}a.s.$$

事实上,由 M 的正交性及

$$\begin{aligned}\langle M(A\cup B)\rangle_t&=\langle M(A)+M(B)\rangle_t\\&=\langle M(A)\rangle_t+\langle M(B)\rangle_t+2\langle M(A),M(B)\rangle_t\end{aligned}$$

即得结论正确.

2° $A\subset B\Rightarrow\langle M(A)\rangle_t\leqslant\langle M(B)\rangle_t$,

$s\leqslant t\Rightarrow\langle M(A)\rangle_s\leqslant\langle M(A)\rangle_t$.

3° μ 是 σ- 有限测度,μ 的 σ- 有限性由 M_T 的 σ- 有限性可得,在 1° 中取数学期望可得 μ 的可加性.

由此我们设想存在 $\mathscr{B}_+\times\mathscr{B}(S)$ 上的可料测度 $\upsilon(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)$,使得 $\langle M(A)\rangle_t=\upsilon([0,t]\times A)$,为此我们有如下的定理.

6.4.1 定理 设 M 是 $(\mathscr{F}_t)_{t\geqslant0}$ 适应的正交鞅测度,则存在 $(S,\mathscr{B}(S))$ 上的 σ- 有限测度族 $\{\upsilon_t(\cdot):t\leqslant T\}$,使得

(Ⅰ) $\{\upsilon_t,t\leqslant T\}$ 可料;

(Ⅱ) 对任意的 $A\in\mathscr{B}(S)$,$t\to\upsilon_t(A)$ 是右连续的增过程;

(Ⅲ) 对任意的 $t\geqslant0$,$A\in\mathscr{B}(S)$,

$P(\{\upsilon_t(A)=\langle M(A)\rangle_t\})=1$.

证明 不妨假设 $S\subset\boldsymbol{R}$,因为 S 和 $\boldsymbol{R}$ 的一个子集 F 同胚,设

$h:S \to F$ 是同胚映射，如果定义

$$N_t(A) = M_t(h^{-1}(A)), \mu'(A) = \mu(h^{-1}(A))$$

则 N 就是 F 上的正交鞅测度.

因为 M 是 σ- 有限的，所以存在 $S_n \uparrow S$ 使得 $\mu(S_n) < \infty$. 从而存在紧子集 $K_n \subset S_n$ 使得 $\mu(S_n - K_n) < 2^{-n}$. 可以假设 $K_n \subset K_{n+1}$, $n \geqslant 1$，因此，只要对每个 K_n 给出定理的证明即可，故可以假设 S 为 $\boldsymbol{R}$ 中的紧集，并且 $\mu(S) < \infty$.

定义

$$F_t(x) = \langle M((-\infty, x])\rangle_t, \quad -\infty < x < \infty,$$

则由 2° 知

$$\begin{cases} x \leqslant x' \Rightarrow F_t(x) \leqslant F_t(x'), \\ x \leqslant x', t \leqslant t' \Rightarrow F_t(x') - F_t(x) \leqslant F_{t'}(x') - F_{t'}(x). \end{cases} \tag{4.1}$$

对于任意固定的 $t \leqslant T$，由 2° 知

$$F_t(x) - F_t(x_1) \leqslant \langle M((x_1, x_2])\rangle_t \leqslant \langle M((x_1, x_2])\rangle_T, a.s.$$

从而由右连续性知上式对任意的 $t \leqslant T$ 及 $(x_1, x_2]$ 中的有理数成立，注意到 $E[\langle M((x_1, x_2])\rangle_T] = \mu((x_1, x_2])$，因此有

$$E\left\{\sup_{\substack{t \leqslant T \\ x_1 \leqslant x \leqslant x_2 \\ x \in Q}} |F_t(x) - F_t(x_1)|\right\} \leqslant \mu((x_1, x_2]). \tag{4.2}$$

令

$$\overline{F}_t(x) = \inf\{F_{t'}(x'); x' > x, t' > t, x', t' \in \boldsymbol{Q}\},$$

则由(4.1) 显然有

$$t_1 \leqslant t_2, x_1 \leqslant x_2 \Rightarrow \overline{F}_{t_1}(x_1) \leqslant \overline{F}_{t_2}(x_2).$$

(4.2) 可推得$\overline{F}_t(x)$ 关于每个变元 t 和 x 是右连续.

设 t_n 和 x_n 分别是严格下降到 t 和 x 和数列，则

$$F_t(x) \leqslant \overline{F}_t(x) \leqslant F_{t_n}(x_n) = F_{t_n}(x) + [F_{t_n}(x_n) - F_{t_n}(x)].$$

而由右连续性推得 $F_{t_n}(x) \to F_t(x)$，又(4.2) 可推得$[F_{t_n}(x_n) - F_{t_n}(x)\}$ 依概率收敛于 0，故对任意固定的 $x \in \boldsymbol{R}$,

$$P(\{\overline{F}_t(x) = F_t(x); t \leqslant T\}) = 1. \tag{4.3}$$

令 v_t 为 $\boldsymbol{R}$ 上由 $\overline{F}_t$ 所生成的分布. 因为 S 是紧集, 所以 $\boldsymbol{R}\backslash S$ 是开集. 从而对任意的 $(a,b] \subset \boldsymbol{R}\backslash S$, 由 (4.3) 有

$$\begin{aligned} v_t((a,b]) &= \overline{F}_t(b) - \overline{F}_t(a) = F_t(b) - F_t(a) \\ &\leqslant F_T(b) - F_T(a) \end{aligned}$$

对于一切有理数 $t \leqslant T$ 成立. 又由 $\overline{F}$ 的右连续性可得

$$0 \leqslant \sup_{t \leqslant T} v_t((a,b]) \leqslant F_T(b) - F_T(a), a.s.$$

而上式右端的数学期望为 0, 即 $\mu((a,b]) = 0$, 从而可知 v 在 $\boldsymbol{R}\backslash S$ 上没有负荷.

因为 $\{v_t: 0 \leqslant t \leqslant T\}$ 是由 $\overline{F}_t(x), x \in \boldsymbol{Q}$ 所确定的, 从而由 (4.3) 知 $\{v_t: 0 \leqslant t \leqslant T\}$ 也是由 $F_t(x), x \in \boldsymbol{Q}$ 所确定的, 因此由 F_t 的可料性可推得 $\{v_t: 0 \leqslant t \leqslant T\}$ 是可料的, (Ⅰ) 得证.

因为对于 $t < t'$, $\overline{F}_{t'}(x) - \overline{F}_t(x)$ 是一个分布函数, 所以对于任意的 A, $t \to v_t(A)$ 是单调递增的. 对 $A = (-\infty, x]$ 或 $A = \boldsymbol{R}$, $t \to v_t(A)$ 是右连续的, 利用单调类定理可知对任意 Borel 集 A, $t \to v_t(A)$ 是右连续的增过程.

往证 (Ⅲ) 成立. 对于 $A = (-\infty, x]$, $M_t^2(A) - v_t(A)$ 是一个鞅, 从而有 $v_t(A) = F_t(x) = \langle M(A) \rangle_t$. 令 $\mathscr{G} = \{A \in \mathscr{B}(S): M_t^2(A) - v_t(A)$ 是鞅$\}$, 则 $\forall\, x \in \boldsymbol{R}$, $(-\infty, x] \in \mathscr{G}$, 对任意的 $(a,b] \subset \boldsymbol{R}$, 由 M 的正交性得

$$\begin{aligned} & M_t^2((a,b]) - v_t((a,b]) \\ &= M_t^2((-\infty,b]) - v((-\infty,b]) - [M_t^2((-\infty,a]) \\ &\quad - v((-\infty,a])] - 2M_t((-\infty,a])M_t((a,b]) \end{aligned}$$

是鞅, 所以 $(a,b] \in \mathscr{G}$. 可以证明形如 $(a,b]$ 的有限并集仍在 $\mathscr{G}$ 中, 又对充分大的 x, 我们有 $v_t((-\infty,x]) = v_t(\boldsymbol{R})$, 因此 $\boldsymbol{R} \in \mathscr{G}$.

任取 $A \in \mathscr{G}$, 因为

$$M_t^2(A^c) - v_t(A^c)$$

$= M_t^2(\boldsymbol{R}) - \upsilon_t(\boldsymbol{R}) - [M_t^2(A) - \upsilon_t(A)] - 2M_t(A)M_t(A^c)$
是鞅，所以 $\mathscr{G}$ 中的元素关于余运算封闭，设 $\{A_n\}$ 为 $\mathscr{G}$ 中的单调增序列，且 $A_n \uparrow A$，则 $M_t(A_n) L^2$- 收敛于 $M_t(A)$，$\upsilon_t(A_n)$ 收敛到 $\upsilon_t(A)$，因此鞅 $M_t^2(A_n) - \upsilon_t(A_n) L^1$- 收敛到 $M_t^2(A) - \upsilon_t(A)$，所以 $M_t^2(A) - \upsilon_t(A)$ 是鞅，这表明 $A \in \mathscr{G}$，故 $\mathscr{G} \supset \mathscr{B}$. 证毕.

因为 $t \to \upsilon_t(A)$ 是增的，所以我们可以在 $(\boldsymbol{R}_+ \times S, \mathscr{B}_+ \times \mathscr{B}(S))$ 上定义测度 $\upsilon([0,t] \times A) = \upsilon_t(A)$. 因此我们有如下结论：

6.4.2 推论 设 M 是正交鞅测度，则在 $\mathscr{B}_+ \times \mathscr{B}(S)$ 上存在一个 σ- 有限测度 $\upsilon(\mathrm{d}s, \mathrm{d}x)$ 使得

$$\upsilon_t(A) = \upsilon([0,t] \times A), \quad \forall A \in \mathscr{B}(S), \quad \forall t > 0.$$

以后记 $\upsilon = \langle M \rangle$，称 υ 为 M 的二次变差测度.

注 设 M 是正交鞅测度，则对任意的 A、$B \in \mathscr{B}(S)$，$t > 0$，

$$\langle M(A), M(B) \rangle_t = \langle M(A \cap B) \rangle_t = \upsilon([0,t] \times A \cap B), \quad P\text{-}a.s.$$

这表明 υ 完全确定了 M 的特征.

同定理 6.4.1 及推论 6.4.2 的证明类似，我们有如下结果：

6.4.3 定理 设 M 是 S 上强正交鞅测度，则存在 $\mathscr{B}_+ \times \mathscr{B}(S)$ 上 σ- 有限可选的随机测度 $\mu(\mathrm{d}s, \mathrm{d}x)$，使得对任意的 $A \in \mathscr{B}(S)$，$\{\mu([0,t] \times A\}_{t \geqslant 0}$ 是可选过程，并且满足

$$\mu([0,t] \times A) = [M(A)]_t, P\text{-}a.s. \quad \forall t > 0. \quad A \in \mathscr{B}(S).$$

记 $\mu = [M]$，如果 $\upsilon = \langle M \rangle$，则 υ 是 μ 的可料对偶投影.

6.4.4 定义 设 M 是正交鞅测度，$\upsilon = \langle M \rangle$，如果 $E\upsilon(\boldsymbol{R}_+ \times S) < \infty$，则称 M 是可积的. 如果存在一列紧集 $K_n \uparrow S$，停时列 $T_n \uparrow \infty$，$a.s.$，使得对每个 $n \geqslant 1$，$E\upsilon([0,T_n] \times K_n) < \infty$，则称 M 是局部可积的.

设 M 是正交鞅测度，$\upsilon = \langle M \rangle$，记

$$\mathscr{S}_v = \Big\{ h(\omega,s,x) = \sum_{i=1}^{n} h_i(\omega) I_{]u_i,v_i]}(s) I_{B_i}(x) : B_i \in \mathscr{B}(S),$$

h_i 是 $\mathscr{F}_{u_i}$ 可测有界，并且

$$E\Big(\int_{R_+ \times S} h^2(\omega,s,x) v(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x) \Big) < \infty \Big\},$$

$$L_v^2 = \Big\{ f \in \widetilde{\mathscr{P}} : E\Big(\int_{R_+ \times S} f^2(s,x) v(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x) \Big) < \infty \Big\}.$$

如果 $h \in \mathscr{S}_v$，定义

$$h.M_t(A) = \sum_{i=1}^{n} h^i (M_{v_i \wedge t}(A \cap B_i) - M_{u_i \wedge t}(A \cap B_i)),$$

$$\forall A \in \mathscr{B}(S),$$

则 $h.M$ 是正交鞅测度，并且其二次变差测度为 $h^2(s,x)v(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)$. 因为 $\mathscr{S}_v$ 在 L_v^2 中稠密，所以线性映射 $h \to h.M$ 可以延拓到 L_v^2 上. 对于 $f \in L_v^2$，我们称 $f.M$ 为 f 关于 M 的随机积分.

随机积分具有下述性质：

6.4.5 性质 1) 设 $f \in L_v^2$，则 $f.M$ 是鞅测度. 当 M 连续时，$f.M$ 也连续.

2) 如果 $f, g \in L_v^2$，$A, B \in \mathscr{B}(S)$，则

$$\langle f.M(A), g.M(B) \rangle_t = \int_0^t \int_{A \cap B} f(s,x) g(s,x) v(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x).$$

这个性质按下述意义确定了连续的正交鞅测度.

6.4.6 推论 设 M 是 S 上的正交鞅测度，$v(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)$ 为 $\boldsymbol{R}_+ \times S$ 上的随机连续的正测度，则 M 是以 v 为二次变差测度的连续鞅测度的充要条件是：$\forall f \in L_v^2, t > 0$

$$E\Big(\exp\Big\{ \int_0^t \int_S f(s,x) M(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x) - \frac{1}{2} \int_{(0,t] \times S} f^2(s,x) v(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x) \Big\} \Big) = 1. \tag{4.5}$$

注：为了方便，有时我们记 $\int_0^t \int_S f(s,x) M(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)$ 为 $M_t(f)$.

证明　必要性是显然的. 往证充分性.

对任意的 $f \in L_\nu^2$, 令

$$F(\omega,u,x) = \theta f(\omega,u,x) I_{]s,t]}(u) I_{G_s}(\omega),$$

其中 $G_s \in \mathscr{F}_s, 0 \leqslant s < t, \theta \in \boldsymbol{R}$.

(4.5) 可推得

$$E\left[\exp\left\{\theta I_{G_s}(M_t(f) - M_s(f)) - I_{G_s}\frac{\theta^2}{2}\int_s^t\int_S f^2(u,x)\nu(\mathrm{d}u,\mathrm{d}x)\right\}\right] = 1,$$

即

$$E\left[I_{G_s}\exp\left\{\theta(M_t(f) - M_s(f)) - \frac{\theta^2}{2}\int_s^t\int_S f^2(u,x)\nu(\mathrm{d}u,\mathrm{d}x)\right\}\right]$$
$$= P(G_s).$$

由 Jacod 和 Mémin[15] 关于连续鞅特征的结果知 $M(f)$ 是连续鞅, 并且其尖括号过程为 $\int_0^t\int_S f^2(u,x)\nu(\mathrm{d}u,\mathrm{d}x)$. 证毕.

下面我们将给出正交鞅测度的例子.

6.4.7　例子　设 $S = \{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$, 则 S 上的正交鞅测度由 n 个相互正交的局部平方可积鞅 $\{M_t(\{a_i\}), i \leqslant n\}$ 唯一确定. 反之, 设 $m^1,m^2,\cdots,m^n$ 是 n 个相互正交的局部平方可积鞅, 并且 $C^i = \langle m^i\rangle, i \leqslant n$, 则映射 $M_t(A) = \sum_{i=1}^n m_t^i \delta_{a_i}(A)$ 定义了 S 上的一个正交鞅测度, 并且 $\nu(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x) = \sum_{i=1}^n \mathrm{d}C_s^i \delta_{a_i}(\mathrm{d}x)$.

6.4.8　性质　设 S 为一 Lusin 空间, $(u_s)_{s\geqslant 0}$ 为 S-值可料过程, m 是局部平方可积鞅, 并且 $C = \langle m\rangle$. 令

$$M_t(A) = \int_0^t I_A(u_s)\mathrm{d}m_s, \quad A \in \mathscr{B}(S), \tag{4.4}$$

则 M 是 S 上的正交鞅测度, 并且 $\nu(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x) = \delta_{u_s}(\mathrm{d}x)\mathrm{d}C_s$.

相反地, 设 M 是 S 上的正交鞅测度, 且 $\nu(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)$

$= \delta_{u_s}(\mathrm{d}x)\mathrm{d}C_s$，则 M 具有(4.4)的形式，其中 $m_t = M_t(S)$.

证明　第一个结论是显然的. 下面只证第二个结论.

对任意的 $A \in \mathscr{B}(S)$，令 $f(\omega,s) = I_A(u_s(\omega))$. 考虑差 $M_t(A) - M_t(fI_S)$. 如果取 $m_s = M_s(S)$，因为 f 不依赖于变量 x，所以

$$M_t(fI_S) = \int_0^t \int_S I_A(u_s)M(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x) = \int_0^t I_A(u_s)\mathrm{d}m_s.$$

由性质 6.4.5 知鞅 $M_t(A) - M_t(fI_S)$ 的尖括号过程为

$$\int_0^t \int_E (I_A(x) - f(s))^2 \delta_{u_s}(\mathrm{d}x)\mathrm{d}C_s$$

$$= \int_0^t (I_A(u_s) - f(s))^2 \mathrm{d}C_s = 0.$$

故 $M_t(A) = M_t(fI_S) = \int_0^t I_A(u_s)\mathrm{d}m_s$，$P$-a.s. 证毕.

6.4.9　性质　设 $(S,\mathscr{B}(S))$ 和 $(U,\mathscr{B}(U))$ 是两个 Lusin 空间，N 是 U 上的正交鞅测度，$\upsilon = \langle N\rangle$，$\Phi(\omega,s,u)$ 是 $\mathscr{P}\times\mathscr{B}(U)$ 可测的 S-值过程. 令

$$M_t(\omega,B) = \int_0^t \int_u I_B(\Phi(\omega,s,u))N(\omega,\mathrm{d}s,\mathrm{d}u),$$

则 M 是 S 上的正交鞅测度，并且

$$\mu([0,t]\times B) = \langle M(B)\rangle_t = \int_0^t \int_U I_B(\Phi(s,u))\upsilon(\mathrm{d}s,\mathrm{d}u),$$

M 称为 N 在 Φ 之下的象鞅测度. 显然当 N 连续时，M 也连续.

设 M 是正交鞅测度，$\upsilon = \langle M\rangle$. 从测度 υ 我们可以得到 M 的协方差测度. 令 $\Delta = \boldsymbol{R}_+ \times \Delta(S)$，其中 $\Delta(S)$ 是 $S\times S$ 的对角线. 作映射

$$\Pi: \Delta \to \boldsymbol{R}_+ \times S$$
$$(t,x,x) \to (t,x).$$

定义

$$Q(\Lambda) = \upsilon(\Pi(\Lambda \cap \Delta)),\quad \forall\, \Lambda \in \mathscr{B}_+ \times \mathscr{B}(S)\times\mathscr{B}(S).$$

则

$$Q([0,t] \times A \times B) = v([0,t] \times (A \cap B))$$
$$= \langle M(A \cap B) \rangle_t$$
$$= \langle M(A), M(B) \rangle_t.$$

Q 确定了 M 的协方差测度，Q 是正的，并且是正定的. 如果取 $K = Q$，则我们有：

6.4.10 推论 正交鞅测度是有价值的.

6.5 核协方差鞅测度

设 M 是$(S, \mathscr{B}(S))$ 上核协方差鞅测度，则存在一个测度 η 及 $L^2(S, \mathscr{B}(S), \eta)$ 的完全正交基$\{\Phi_n\}_{n\geqslant 1}$，使得

$$\sum_{n=1}^{\infty} E\{M_T(\Phi_n)\}^2 < \infty. \tag{5.1}$$

本节我们继续假设 $S = S_n$(n 为某一自然数)，因此 M 是有限的.

6.5.1 定理 对每一 $x \in S$，存在一平方可积鞅$\{M_t(x); t \geqslant 0\}$，使得对 $a.s.\ \omega$，$M_t(\cdot) \in L^2(S, \mathscr{B}(S), \eta)$. 并且还有

(Ⅰ) $M_t(A) = \int_A M_t(x)\eta(\mathrm{d}x)$，$A \in \mathscr{B}(S)$；

(Ⅱ) $Q_M([0,t] \times A \times B) = \int\limits_{A \times B} \langle M(x), M(y) \rangle_t \eta(\mathrm{d}x)\eta(\mathrm{d}y)$；

(Ⅲ) 存在一可料增过程 C_t 及正的可料函数 $\sigma(t,x)$，使得 $E\left\{\int_0^T \int_S \sigma^2(s,x)\mathrm{d}C_s\eta(\mathrm{d}x)\right\} < \infty$，并且有

$$K_M([0,t] \times A \times B) = \int\limits_{[0,t] \times A \times B} \sigma(s,x)\sigma(s,y)\eta(\mathrm{d}x)\eta(\mathrm{d}y)\mathrm{d}C_s; \tag{5.2}$$

(Ⅳ) $\sum_{n=1}^{\infty} E\{M_t(\Phi_n)\}^2 = E\left\{\int_S M_t^2(x)\eta(\mathrm{d}x)\right\}$.

证明　因为 $\Phi \to M_t(\Phi)$ 是线性的，而(5.1)可推得 $\sum_{n=1}^{\infty} M_t^2(\Phi_n) < +\infty, a.s.$，所以对 $a.s.\ \omega \in \Omega, \Phi \to M_t(\omega,\Phi)$ 是 $L^2(S,\mathscr{B}(S),\eta)$ 上的有界线性泛函.从而由有界线性泛函的表示定理知存在 $M_t(\omega,x) \in L^2(S,\mathscr{B}(S),\eta)$，使得对任意的 $\Phi \in L^2(S,\mathscr{B}(S),\eta)$，我们有

$$M_t(\omega,\Phi) = \int_S M_t(\omega,x)\Phi(x)\eta(\mathrm{d}x), P\text{-}a.s.$$

事实上，取 $M_t(\omega,x) = \sum_{n=1}^{\infty} M_t(\omega,\Phi_n)\Phi_n(x)$，则这个级数在 $L^2(S,\mathscr{B}(S),\eta)$ 中是 $P\text{-}a.s.$ 收敛.如果必要我们可抽子序列，使级数 $\sum_{n=1}^{\infty} M_t(\omega,\Phi_n)\Phi_n(x)$ 在 $L^2(\Omega,\mathscr{F},P)$ 中 $\eta\text{-}a.s.\ x$ 收敛.因为对 $\eta\text{-}a.s.\ x, M_t(\omega,x)$ 是鞅序列的 L^2-极限，所以 $(M_t(\omega,x))_{t\geq 0}$ 是一个鞅.通过在 η-零测集上修正 $M_t(\omega,x)$，我们可以假设对每个 x，$(M_t(\omega,x))_{t\geq 0}$ 是鞅.

注意到

$$M_t(A)M_t(B) = \int_{A\times B} M_t(x)M_t(y)\eta(\mathrm{d}x)\eta(\mathrm{d}y),$$

因此

$$\langle M(A),M(B)\rangle_t = \int_{A\times B} \langle M(x),M(y)\rangle_t \eta(\mathrm{d}x)\eta(\mathrm{d}y).$$

这就证明了(Ⅰ)和(Ⅱ)成立.

因为 $\mathscr{B}(S)$ 可分，所以 $\mathscr{B}(S)$ 可以由一个可数半代数 $\mathscr{A}$ 张成.记 $\mathscr{M}$ 是包含 $M_t(A), A \in \mathscr{A}$，并且关于 L^2-收敛封闭的最小鞅族.设 $\mathscr{A} = \{A_1, A_2, \cdots\}$，令

$$C = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\langle M(A_n)\rangle,$$

容易证明

$$\mathrm{d}\langle N\rangle_t \ll \mathrm{d}C_t, \quad \forall N \in \mathscr{M}.$$

从而存在可料过程 h 使得

$$\langle N\rangle = \int_0^{\cdot} h(s)\mathrm{d}C_s. \tag{5.3}$$

利用单调类定理容易证明：对每个 $k \geqslant 1$ 及 $x \in S$，$M(\Phi_k)$，$M(x) \in \mathscr{M}$，从而对 $M(\Phi_k)$ 和 $M(x)$ 均有(5.3)成立.

进一步，利用极化恒等式可知存在函数 $h(s,x,y)$ 使得

$$\langle M(x), M(y)\rangle = \int_0^{\cdot} h(s,x,y)\mathrm{d}C_s.$$

但是 $|\langle M(x),M(y)\rangle| \leqslant \langle M(x)\rangle^{1/2}\langle M(y)\rangle^{1/2}$，因此，我们有

$$|h(s,x,y)| \leqslant h^{1/2}(s,x,x)h^{1/2}(s,y,y).$$

令 $\sigma^2(s,x) = h(s,x,x)$，则

$$Q_M([0,t]\times A\times B) \leqslant \int_{[0,t]\times A\times B} \sigma(s,x)\sigma(s,y)\eta(\mathrm{d}x)\eta(\mathrm{d}y)\mathrm{d}C_s.$$

这表明 $K_M(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x,\mathrm{d}y) = \sigma(s,x)\sigma(s,y)\eta(\mathrm{d}x)\eta(\mathrm{d}y)\mathrm{d}C_s$. K_M 显然是正的和正定的. 下面我们将证明 K_M 是有限的：

$$\begin{aligned}
E\{K([0,T]\times S\times S)\} &= E\left\{\int_0^T\left[\int_S \sigma(s,x)\eta(\mathrm{d}x)\right]^2\mathrm{d}C_s\right\} \\
&\leqslant \eta(S)E\left\{\int_S\int_0^T \sigma^2(s,x)\mathrm{d}C_s\eta(\mathrm{d}x)\right\} \\
&= \eta(S)E\left\{\int_S M_T^2(x)\eta(\mathrm{d}x)\right\} < \infty.
\end{aligned}$$

(Ⅱ)得证.

注意到

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} E\{M_t^2(\Phi_n)\} &= \sum_{n=1}^{\infty} E\left\{\left[\int_S M_t(x)\Phi_n(x)\eta(\mathrm{d}x)\right]^2\right\} \\
&= E\left\{\sum_{n=1}^{\infty} M_n^2(t)\right\},
\end{aligned}$$

其中 $M_n(t) = \int_S M_t(x)\Phi_n(x)\eta(\mathrm{d}x)$. 由 Plancharel 定理，我们有

$$\sum_{n=1}^{\infty} E\{M_t^2(\Phi_n)\} = E\left\{\int_S M_t^2(x)\eta(\mathrm{d}x)\right\}.$$

(Ⅳ)得证. 证毕.

6.5.2 注 由定理 6.5.1(Ⅳ),我们知道(5.1)中的和式与完全正交基$\{\Phi_n\}_{n\geq 1}$的选取无关.

由定理 6.5.1,容易证明下述命题成立.

6.5.3 性质 设 M 是 $L^2(S,\mathscr{B}(S),\eta)$ 上的核协方差鞅测度,f 是可料过程,令

$$k^2(x) = E\left[\int_0^T f^2(s,x)\mathrm{d}\langle M(x)\rangle_s\right].$$

如果$\int_S k^2(x)\eta(\mathrm{d}x) < \infty$,则我们有

(Ⅰ) $\|f\|_M < \infty$(因此 $f.M$ 有定义);

(Ⅱ) 对 η-$a.s.\ x$,作为 $It\hat{o}$ 积分

$$f.M_t(x) \triangleq \int_0^t f(s,x)\mathrm{d}M_s(x)$$

存在;

(Ⅲ) $f.M_t(A) = \int_A f.M(x)\eta(\mathrm{d}x)$;

(Ⅳ) 对 $L^2(S,\mathscr{B}(S),\eta)$ 的任一完全正交基$\{\Phi_n\}_{n\geq 1}$,$t\leqslant T$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} E[f.M(\Phi_n)]_t^2 \leqslant \int_S k^2(x)\eta(\mathrm{d}x).$$

因此,$f.M$ 是核协方差鞅测度.

证明 留给读者作为练习.

6.6 独立增量鞅测度

设 S 为具有可数基局部紧的 Hausdorff 空间,$\mathscr{M}_F(S)$ 和 $\mathscr{M}_R(S)$ 分别表示 $\mathscr{B}(S)$ 上有限测度和 Radon 测度所生成的线性空间,则存在一距离函数 $\mathrm{d}_F(\mathrm{d}_R)$ 使得$(\mathscr{M}_F(S),\mathrm{d}_F)((\mathscr{M}_R(S),$

d_R)) 成为一完备可分的距离空间，并且 $\mathscr{M}_F(S)(\mathscr{M}_R(S))$ 中的 μ_n 弱收敛于 μ(μ_n 淡收敛于 μ) 等价于 $d_F(\mu_n,\mu)\to 0(d_R(\mu_n,\mu)\to 0)$. 因此 $\mathscr{M}_F(S)(\mathscr{M}_R(S))$ 关于测度的弱收敛(淡收敛)拓扑构成一 Polish 空间.

6.6.1 定义 设 M 是 S 上的 $\mathscr{F}_t$- 鞅测度，称 M 是 F- 鞅测度 (R- 鞅测度)，如果对任意的 $\omega\in\Omega, t>0$, $M_t(\omega,\cdot)$ 和 $M_{t-}(\omega,\cdot)$ 均在 $\mathscr{M}_F(S)(\mathscr{M}_R(S))$ 中.

6.6.2 定义 设 M 是 $\mathscr{F}_t$- 适应的鞅测度.

Ⅰ) 称 M 是独立增量的，如果对任意的 $0\leqslant s<t$，随机测度 M_t-M_s 与 $\mathscr{F}_s$ 独立.

Ⅱ) 称 M 是平稳独立增量的，如果 M 是独立增量，并且随机测度 M_t-M_s 的分布只依赖于 $t-s$.

Ⅲ) 假设 M 是 F- 鞅测度(或 R- 鞅测度). 称时间 $t\geqslant 0$ 为 M 的固定不连续点，如果 $P(\{M(\{t\}\times dx)\neq 0\})>0$.

因为 F- 鞅测度(R- 鞅测度) 的不连续点集至多可数，所以平稳独立增量的 $F(R)$- 鞅测度没有固定不连续点.

同半鞅理论类似，我们也来研究鞅测度的可料特征的存在性. 由推论 6.4.2 我们只要研究鞅测度的跳测度的可料对偶投影的存在性. 对于 $F(R)$- 鞅测度，我们有如下定理：

6.6.3 定理 设 M 是一 R- 鞅测度，记 $M(\{t\}\times dx)=M_t-M_{t-}$. 令

$$\alpha(dt,dy)=\sum_{s>0}I_{\{M(\{s\}\times dx)\neq 0\}}\varepsilon_{(s,M(\{s\}\times dx))}(dt,dy), \qquad (6.1)$$

称 $\alpha(dt,dy)$ 是 M 的跳跃随机测度. 它是 $\mathscr{B}_+\times\mathscr{B}(\mathscr{M}_R(S))$ 上整值随机测度，并且其可料对偶投影存在，记为 $\beta(dt,dy)$. 其中 $\mathscr{B}(\mathscr{M}_R(S))$ 是 $\mathscr{M}_R(S)$ 上的 Borel σ- 域.

证明 显然 $D=\{s:M(\{s\}\times dx)\neq 0\}$ 是稀疏集，$M(\{s\}\times dx)$ 是可选过程，因此 α 是整值随机测度(参见[13]的定理

11.13). 往证 α 是 σ- 可积的，即证明测度 M_α(定义是 1.1.3) 是 $\mathscr{P} \times \mathscr{B}(\mathscr{M}_R(S))$ 上的 σ 有限测度.

对每个 $n \geqslant 1$，令

$$T_{n,0} = 0,$$

$$T_{n,m} = \inf\left\{t > T_{n,m-1} : \frac{1}{n} \leqslant \mathrm{d}_R(0, M(\{t\} \times \mathrm{d}x)) < \frac{1}{n-1}\right\},\quad m > 1,$$

则 $T_{n,m}$ 是停时，并且 $\widetilde{A}_{n,m} = [\![0, T_{n,m}]\!] \times \left(\left\{y \in \mathscr{M}_R(S): \frac{1}{n} \leqslant \mathrm{d}_R(0,y) < \frac{1}{n-1}\right\} \cup \{0\}\right) \in \mathscr{P} \times \mathscr{B}(\mathscr{M}_R(S))$，$\bigcup\limits_{n,m} \widetilde{A}_{n,m} = \Omega \times \boldsymbol{R}_+ \times \mathscr{M}_R(S)$ 以及 $M_\alpha(\widetilde{A}_{n,m}) \leqslant m$. 证毕.

注 对 F- 鞅测度，同样的结论也成立.

6.6.4 定义 设 M 是 $\mathscr{F}_t$- 适应的正交 $R(F)$- 鞅测度，令 $v = \langle M \rangle$，β 为 M 的跳测度的可料对偶投影，则称 (v, β) 为 M 的可料特征.

为了叙述方便，以后我们只讨论 R- 鞅测度，其结论对于 F- 鞅测度也成立.

设 M 是一 R- 鞅测度，则对任意的 $f \in C_K(R \times S)$，$f.M$ 仍是 R- 鞅测度. 令 $X = \int_0^\cdot \int_S f(s,x) M(\mathrm{d}s, \mathrm{d}x)$，则 X 是实值鞅，假设 γ 为 X 的跳测度，λ 为 γ 的可料对偶投影，则对任意的 $g \in C_K(\boldsymbol{R})$，我们有

$$\int_0^\cdot \int_R g(x) \gamma(\mathrm{d}s, \mathrm{d}x)$$

$$= \int_0^\cdot \int_{\mathscr{M}_R(S)} g\left(\int_S f(s,x) y(\mathrm{d}x)\right) \alpha(\mathrm{d}s, \mathrm{d}y).$$

对上式两边取可料对偶投影得

$$\int_0^t\int_R g(x)\lambda(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)=\int_0^t\int_{\mathscr{A}_R(S)} g\left(\int_S f(s,x)y(\mathrm{d}x)\right)\beta(\mathrm{d}s,\mathrm{d}y). \tag{6.2}$$

6.6.5 定理 (1) 设 M 是 $\mathscr{F}_t$-适应的正交 R-鞅测度.如果 M 是独立增量的,则存在 M 的可料特征的一个非随机版本 (υ,β).

(2) 设 M 是 $\mathscr{F}_t$-适应的强正交 R-鞅测度,则 M 是独立增量的充要条件是 M 的可料特征有一个非随机的版本.

证明 (1) 假设 M 是独立增量的鞅测度,则对任意的 $A\in\mathscr{B}(S)$,$M(A)$ 是独立增量的鞅,因此 $\upsilon([0,t]\times A)$ 是 $a.s.$ 非随机的.从而由单调类定理知 υ 有非随机的版本.其次,因为 α 是 Poisson 随机测度,所以 β 是 $a.s.$ 非随机.

(2) 我们只要证明在$(\alpha$、$\beta)$ 是非随机的条件下,M 是独立增量的.为此我们只要证明对任意的两两互不相交族 $\{A_1,A_2,\cdots,A_n\}\subset\mathscr{B}(S)$,$X_t=(M_t(A_1),\cdots,M_t(A_n))$ 是 $\boldsymbol{R}^n$-值独立增量的鞅.因为 M 强正交,所以 $M(A_i)$、$M(A_j)(i\neq j)$ 没有相同的跳时.令 λ 和 λ_i 分别为 X 和 $M(A_i)$ 的跳测度的可料对偶投影,则由假设和 (6.2) 可得 $\lambda=\sum_{i=1}^n\lambda_i$ 和 $\langle X^c\rangle=(a_{ij})_{i,j\leqslant n}$ 是非随机的,其中 $a_{ii}=\langle M^c(A_i)\rangle$,$a_{ij}=0,i\neq j$.定理 1.4.17 表明 X 是 n 维独立增量的鞅.证毕.

6.6.6 定理 设 M 是连续的正交鞅测度,$\upsilon=\langle M\rangle$,则 M 是白噪声的充要条件是 υ 有一非随机的版本.

证明 如果 M 是白噪声,则与定理 6.6.5(1) 的证明类似可知 υ 有非随机的版本.

相反地,假设 M 是正交鞅测度,且 υ 非随机,则对任意的 $A\in\mathscr{B}(S)$,$M_t(A)$ 和 $M_t^2(A)-\upsilon([0,t]\times A)$ 均为鞅.要证 M 是白噪声,我们只要证明对于两两互不相交的集 $A_1,A_2,\cdots,A_n$,

$(M(A_1),\cdots,M(A_n))$ 是相互独立的,零均值独立增量的 Gauss 过程,令

$$N_s = \exp\left\{i \sum_{j=1}^{n} \lambda_j (M_{t+s}(A_j) - M_t(A_j))\right\}.$$

由 Itô 公式得

$$N_s = 1 + \sum_{j=1}^{n} \int_t^{t+s} i\lambda_j N_u \mathrm{d}M_u(A_j) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^2 \int_t^{t+s} N_u v(\mathrm{d}u \times A_j),$$

此处我们利用 M 的正交性:$\langle M(A_i), M(A_j)\rangle = 0, i \neq j$. 记 $f(s) = E\{N_s | \mathscr{F}_t\}$, 则我们有

$$f(s) = 1 - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^2 \int_t^{t+s} f(u) v(\mathrm{d}u \times A_j).$$

这个函数方程有唯一解

$$f(s) = \prod_{j=1}^{n} \exp\left\{- \frac{1}{2} \lambda_j^2 v((s,t] \times A_j)\right\}.$$

这表明增量 $M_{t+s}(A_j) - M_t(A_j), j \leqslant n$ 与 $\mathscr{F}_t$ 独立,并且它们之间相互独立,每个 $M_{t+s}(A_j) - M_t(A_j)$ 是均值为 0、方差为 $v((s,t] \times A_j)$ 的 Gauss 随机变量. 因此 M 是二次变差测度为 v 的白噪声.

6.7 正交鞅测度的表示

6.7.1 定义 设 M 和 N 分别为 S 和 S' 上的 $\mathscr{F}_t$- 适应的正交鞅测度. 如果对任意 $A \in \mathscr{B}(S), B \in \mathscr{B}(S'), \{M_t(A)N_t(B), t \geqslant 0\}$ 是 $\mathscr{F}_t$- 鞅,则称 M 和 N 相互正交.

首先,我们研究以 $q_t(\mathrm{d}x)\mathrm{d}K_t$ 为二次变差测度的鞅测度.

6.7.2 引理 设 $v(\mathrm{d}t, \mathrm{d}x)$ 是一个 σ- 有限的可料随机测度,则 v 有如下分解:$v(\mathrm{d}t, \mathrm{d}x) = q_t(\mathrm{d}x)\mathrm{d}K_t$,其中 K_t是可料的增过程,$(q_t(\mathrm{d}x))_{t\geqslant 0}$ 是随机 σ- 有限测度的可料族.

证明 如果 ν 是有限测度，结论是早已知道的事实. 如果 ν 不是有限的，则存在 $\Omega \times \boldsymbol{R}_+ \times S$ 上正值 $\mathscr{P} \times \mathscr{B}(S)$ 可测的函数 w 使得

$$\nu'(\mathrm{d}t,\mathrm{d}x) = w(t,x)\nu(\mathrm{d}t,\mathrm{d}x)$$

是有限测度，则有分解

$$\nu'(\mathrm{d}t,\mathrm{d}x) = q'_t(\mathrm{d}x)K_t.$$

取 $q_t(\mathrm{d}x) = w^{-1}(t,x)q'_t(\mathrm{d}x)$，即得引理成立. 证毕.

注 上述分解不是唯一的，但假设 K 是增过程总是可以办得到的. 例如，我们可以利用 $t + K_t$ 代替 K_t. 以下我们将假设鞅测度的二次变差测度具有形式 $q_t(\mathrm{d}x)\mathrm{d}K_t$，其中 K 为可料增过程.

6.7.3 引理 设 $a(t)$ 是 $\boldsymbol{R}_+$ 上一非负右连续的增函数(允许取 $+\infty$). 令

$$c(t) = \inf\{s: a(s) > t\}, \quad t \geqslant 0,$$

则 $c(t)$ 为 $\boldsymbol{R}_+$ 上非负右连续的增函数. 设 $t \geqslant 0$，则为使 $c(t) < \infty$，必须且只需 $t < a(\infty) \triangleq \lim\limits_{t\to\infty} a(t)$. 令

$$a_-(t) = a(t-) = \lim_{s\uparrow\uparrow t} a(s),$$

$$c_-(t) = c(t-) = \lim_{s\uparrow\uparrow t} c(s) = \inf\{s: a(s) \geqslant t\}$$

$$= \sup\{s: a(s) < t\}.$$

若约定 $a_-(0) = c_-(0) = 0$，则对一切 $t \geqslant 0$，我们有

$$a_-(c_-(t)) \leqslant a_-(c(t)) \leqslant t.$$

对一切 $t < a(\infty)$，我们有

$$a(c(t)) \geqslant a(c_-(t)) \geqslant t.$$

特别地，如果 a 连续，则对一切 $t < a(\infty)$，我们有

$$a(c(t)) = a(c_-(t)) = t.$$

由于 c 与 a 的关系对等，所以我们有

$$a(s) = \inf\{t: c(t) > s\}, s \geqslant 0.$$

此外，我们还有

$a(s) = \sup\{t : c(t) \leqslant s\} \quad s \geqslant 0.$

证明　留给读者完成.

6.7.4　定理　设 $(q_t(\mathrm{d}x))_{t\geqslant 0}$ 是定义在 Lusin 空间 $(S, \mathscr{B}(S))$ 上的 σ- 有限随机测度的可料族. λ 是 Lusin 空间 $(U, \mathscr{B}(U))$ 上非随机的 σ- 有限扩散测度, 并且满足

$$q_t(S) \leqslant \lambda(U), \quad \forall\, t \geqslant 0, \quad \forall\, \omega \in \Omega.$$

则(Ⅰ)存在一个 $S \cup \{\delta\}$(δ 是 S 的死点)值可料过程 $\varphi(t,u)$, 使得

$$q_t(A) = \int_U I_A(\varphi(t,u))\lambda(\mathrm{d}u), \forall\, A \in \mathscr{B}(S), \forall\, \omega \in \Omega. \tag{7.1}$$

(Ⅱ)存在 S 到 U 的可料核 $Q(t,x,\mathrm{d}u)$, 使得对任意的可测正函数 f, 任意的 $\omega \in \Omega, B \in \mathscr{B}(U)$

$$\int_U I_B(u) f(\varphi(t,u))\lambda(\mathrm{d}u) = \int_S f(x) Q(t,x,B) q_t(\mathrm{d}x). \tag{7.2}$$

证明　(Ⅰ)因为 S 和 U 都是 Lusin 空间, 所以存在 $[0,1]$ 的可测子集到 S 的可测双射 k 及 $[0,1]$ 的可测子集到 U 的可测双射 l, 我们记 $\bar{q}_t(\cdot)$ 和 $\bar{\lambda}(\cdot)$ 分别为 $q_t(\cdot)$ 和 $\lambda(\cdot)$ 在 k 及 l 下的象测度. 如果存在可料过程 $\bar{\varphi}(t,v)$, 使得

$$\bar{q}_t(A) = \int_{[0,1]} I_A(\bar{\varphi}(t,v))\,\bar{\lambda}(\mathrm{d}v), \forall\, A \in \mathscr{B}([0,1]), \forall\, \omega \in \Omega,$$

只要取 $\varphi(t,u) = k \circ \bar{\varphi}(t, l^{-1}(u))$, 则我们有(7.1)成立. 因此, 我们只要就 $S = U = [0,1]$ 证明定理中第一个结论成立.

a)　设 $(p_t(\mathrm{d}x))_{t\geqslant 0}$ 是 $[0,1]$ 上 σ- 有限的可料测度族, 在单点集上没有负荷, 并且

$$q_t([0,1]) \leqslant p_t([0,1]) < \infty. \tag{7.3}$$

记 $F_t(x)$ 和 $G_t(x)$ 分别为 $q_t(\mathrm{d}x)$ 和 $p_t(\mathrm{d}x)$ 的分布函数, 则由假设知 $F_t(x)$ 是右连左极的增函数. $G_t(x)$ 是连续的增函数, 并且 F 和 G 是 $\mathscr{P} \times \mathscr{B}([0,1])$ 可测的. 令

$$\varphi(t,u) = \begin{cases} \inf\{s : F(t,s) \geqslant G(t,u)\}, & \text{如果 } G(x,u) \leqslant F(x,1), \\ \infty, & \text{其它}. \end{cases}$$

显然有$\{\varphi(t,u)>s\}=\{F(t,s)<G(t,u)\}\in\mathscr{P}\times\mathscr{B}([0,1])$. 对任意固定的 $t\geqslant 0$, 由假设(7.3)知 $G_t(1)\geqslant F_t(x)$, $\forall\, x\geqslant 0$, 又 $G_t(x)$ 是 x 的连续函数, 所以由引理 6.7.3, 我们有

$$
\begin{aligned}
&\int_{[0,1]} I_{\{\varphi(t,u)\leqslant s\}} p_t(\mathrm{d}u) \\
&=\int_{[0,1]} I_{\{F(t,s)\geqslant G(t,u)\}} p_t(\mathrm{d}u) \\
&=\int_{[0,1]} I_{\{\widetilde{G}(t,F(t,s))\geqslant u\}} p_t(\mathrm{d}u) \\
&=G(t,\widetilde{G}(t,F(t,s)))=F(t,s)=q_t([0,s])
\end{aligned}
$$

其中$\widetilde{G}(t,s)=\inf\{u:G(t,u)>s\}$.

b)　假设 $q_t(\mathrm{d}x)$ 是$([0,1],\mathscr{B}([0,1])$ 上 σ- 有限测度的可料族, λ 是$([0,1],\mathscr{B}([0,1]))$ 上非随机的 σ- 有限扩散测度, 并且满足 $q_t([0,1])\leqslant\lambda([0,1])$, $\forall\, t\geqslant 0$, $\forall\,\omega\in\Omega$. 设$\{A_n(t)\}_{n\geqslant 1}$ 是$[0,1]$ 有一个分划, 使得 $I_{A_n(t)}(u)\in\mathscr{P}\times\mathscr{B}([0,1])$, $q_t(A_n(t))<\infty$. 因为 λ 是扩散测度, 并且

$$q_t(A_k(t))\leqslant\lambda([0,1]),\quad \forall\, k\geqslant 1,$$

所以对 $k=1$, 存在一集合 $B_1(t)\subset[0,1]$, 使得 $\lambda(B_1(t))=q_t(A_1(t))$. 而 $I_{B_1^c(t)}\cdot\lambda$ 是扩散测度, 并且

$$q_t([0,1]-A_1(t))\leqslant(I_{B_1^c(t)}\cdot\lambda)([0,1]),$$

因此存在 $B_2(t)$, $B_2(t)\cap B_1(t)=\varnothing$, 使得

$$\lambda(B_2(t))=q_t(A_2(t)).$$

如此进行下去, 我们就得到$[0,1]$ 的一个分划$\{B_k(t)\}_{k\geqslant 1}$, 使得 $I_{B_k(t)}(u)\in\mathscr{P}\times\mathscr{B}([0,1])$, 并且

$$q_t(A_k(t))\leqslant\lambda(B_k(t))<+\infty,\quad k\geqslant 1.$$

由 a) 的证明知存在定义在 $B_k(t)$ 上取值于 $A_k(t)\cup\{\delta\}$ 的可料过程 $\varphi_k(t,u)$, 使得

$$q_t(A_k(t)\cap C)=\int_{[0,1]} I_{B_k(t)}(u) I_{\{\varphi_k(t,u)\in C\cap A_k(t)\}}\lambda(\mathrm{d}u).$$

令

$$\varphi(t,u)=\begin{cases}\varphi_k(t,u), & \text{如果}(t,u)\in B_k(t),k\geqslant 1\\ \delta, & \text{如果}(t,u)\notin \bigcup_{k=1}^{\infty}B_k(t),\end{cases}$$

则显然 $\varphi(t,u)$ 满足(7.1)中的要求.

(Ⅱ)对任意的 $B\in\mathscr{B}(U)$,令

$$\mu_B^1(\omega,t,f)=\int_U I_B(u)f(\varphi(t,u))\lambda(\mathrm{d}u),$$

$$\mu^2(\omega,t,f)=\int_U f(\varphi(t,u))\lambda(\mathrm{d}u)=\int_S f(x)q_t(\mathrm{d}x)$$

则对任意的可测函数 $f\geqslant 0,\mu_B^1(\omega,t,f)\leqslant\mu^2(\omega,t,f)$,从而由 Doob 定理知存在 $\mathscr{P}\times\mathscr{B}(S)$ 可测函数 $Q(\omega,t,x,B)$ 使得

$$\mu_B^1(\omega,t,f)=\mu^2(\omega,t,fQ(\omega,t,\cdot,B)),$$

即

$$\int_U I_B(u)f(\varphi(t,u))\lambda(\mathrm{d}u)=\int_S f(x)Q(\omega,t,x,B)q_t(\mathrm{d}x).$$

定理证毕.

6.7.5 定理 设 $(\Omega,\mathscr{F},\mathscr{F}_t,P)$ 是一个带流的概率空间,υ 是随机连续的 σ-有限的随机测度,并且满足

$$\upsilon(\mathrm{d}t,\mathrm{d}x)=q_t(\mathrm{d}x)\mathrm{d}K_t,$$

其中 K 是连续增过程,$(q_t)_{t\geqslant 0}$ 可料. 则在扩张的概率空间 $(\Omega\times\widetilde{\Omega},\mathscr{F}\times\widetilde{\mathscr{F}},\mathscr{F}_t\times\widetilde{\mathscr{F}}_t,P\times\widetilde{P})$ 上存在一个以 υ 为二次变差测度的鞅测度 N,N 是白噪声的时间变换的象.

进一步地,N 与每个连续的 $(\mathscr{F}_t,P)$-鞅测度 M 正交.

证明 Ⅰ) 假设 K_t 非随机. 我们可以在一附加的带流概率空间 $(\widetilde{\Omega},\widetilde{\mathscr{F}},\widetilde{\mathscr{F}}_t,\widetilde{P})$ 上构造一白噪声 B,$\langle B\rangle=\lambda(\mathrm{d}u)\mathrm{d}K_t$,其中 λ 满足定理 6.7.4 中的条件. 在扩张的概率空间 $(\hat{\Omega},\hat{\mathscr{F}},\hat{\mathscr{F}}_t,\hat{P})=(\Omega\times\widetilde{\Omega},\mathscr{F}\times\widetilde{\mathscr{F}},\mathscr{F}_t\times\widetilde{\mathscr{F}}_t,P\times\widetilde{P})$ 上,B 仍是一个具有非

随机二次变差测度的鞅测度. 由定理 6.6.6 知 B 是 $\hat{\mathscr{F}}_t$- 白噪声. 令 $\varphi(t,u)$ 是满足(7.1)的可料过程,显然 φ 是 $\hat{\mathscr{P}}\times\mathscr{B}(U)$ 可测的,其中 $\hat{\mathscr{P}}$ 是 $\hat{\mathscr{F}}_t$- 可料 σ- 域.

由性质 6.4.9 及(7.1)可知

$$N_t(\omega,\omega',A)=\int_0^t\int_U I_A(\varphi(\omega,s,u))B(\omega',\mathrm{d}s,\mathrm{d}u),A\in\mathscr{B}(S),$$

是连续鞅测度,并且其二次变差测度为

$$\int_0^t\int_S I_A(\varphi(\omega,s,u))\lambda(\mathrm{d}u)\mathrm{d}K_s=\upsilon((0,t]\times A).$$

设 M 是$(\mathscr{F}_t,P)$- 鞅测度,则 M 也是$(\hat{\mathscr{F}}_t,\hat{P})$- 鞅测度. 由 B 和 M 的定义,显然有 M 和 B 正交. 当 h 是可料节梯函数时,我们可以证明鞅测度 $h(\varphi(s,u)).B$ 与 M 正交, 从而对于 $h\in L^2(\mathrm{d}P\times q_t(\mathrm{d}x)\mathrm{d}K_t)$,亦有 $h(\varphi(s,u)).B$ 与 M 正交,由此可以推得 N 与 M 正交.

Ⅱ) 如果 K 不是确定的,我们可以考虑过程

$$C_t=\inf\{s>0;K_s\geqslant t\}.$$

则 C 是 K 的逆过程. 对于 σ- 有限的随机测度 $\gamma(\mathrm{d}t,\mathrm{d}x)=q_{C_t}(\mathrm{d}x)\mathrm{d}t$(此处 q_{C_t} 是$(\mathscr{F}_{C_t})$ 可料的),由 Ⅰ)所证,我们可以构造二次变差测度为 $\lambda(\mathrm{d}u)\mathrm{d}t$ 的白噪声和$(\mathscr{F}_{C_t})$ 可料过程 φ,使得

$$N_t(A)=\int_0^t\int_U I_A(\varphi(\omega,s,u))B(\mathrm{d}s,\mathrm{d}u),\forall\ t\geqslant 0,A\in\mathscr{B}(S)$$

以 $\gamma(\mathrm{d}t,\mathrm{d}x)$ 为二次变差测度的鞅测度.

如果我们令 $M_t(A)=N_{K_t}(A)$,则 M 是 $\mathscr{F}_t$- 鞅测度,并且其二次变差测度为 $q_t(\mathrm{d}x)\mathrm{d}K_t$,这是因为

$$\langle M(A)\rangle_t=\int_0^{K_t}\int_S I_A(x)q_{C_s}(\mathrm{d}x)\mathrm{d}s=\int_0^t\int_S I_A(x)q_u(\mathrm{d}x)\mathrm{d}K_u.$$

证毕.

下面我们将讨论定理 6.7.5 的逆命题,即每个连续的鞅测度

都是白噪声在时间变换下的象. 为此我们必须利用一个推广的结果，下叙结论是基础.

6.7.6 定理 设$(\Omega,\mathscr{F},\mathscr{F}_t,P)$是一带流的概率空间，$S$和$\overline{S}$是两个 Lusin 空间，$M$是$S$上二次变差测度为$q_t(\mathrm{d}x)\mathrm{d}K_t$的连续鞅测度，其中$K$是连续增过程，$(q_t(\mathrm{d}x))_{t\geqslant 0}$是$\mathscr{F}_t$-可料的随机测度的族.

设$\gamma_t(x,\mathrm{d}\,\overline{x})$是$S$到$\overline{S}$的可料转移概率族. 定义$\boldsymbol{R}_+\times S\times\overline{S}$上$\sigma$-有限可料测度为$p_t(\mathrm{d}x,\mathrm{d}\,\overline{x})=q_t(\mathrm{d}x)\gamma_t(x,d\,\overline{x})$，则在扩张的概率空间$(\Omega\times\widetilde{\Omega},\mathscr{F}\times\widetilde{\mathscr{F}},\mathscr{F}_t\times\widetilde{\mathscr{F}}_t,P\times\widetilde{P})$上存在以$\mathrm{d}K_tp_t(\mathrm{d}x,\mathrm{d}\,\overline{x})$为二次变差测度的鞅测度$\widetilde{M}_t(\mathrm{d}x,\mathrm{d}\,\overline{x})$，并且$\widetilde{M}$在$S$上的投影是$M$，即$\widetilde{M}_t((\omega,\omega'),A\times\overline{S})=M_t(\omega,A)$，$\forall\ A\in\mathscr{B}(S)$，$(\omega,\omega')\in\Omega\times\widetilde{\Omega}$，$\forall\ t\geqslant 0$.

证明 设N是定义在$S\times\overline{S}$上二次变差测度为$\mathrm{d}K_tp_t(\mathrm{d}x,\mathrm{d}\,\overline{x})$的$\widetilde{\mathscr{F}}_t$-鞅测度，并且$N$与每个$\mathscr{F}_t$-鞅测度正交(定理 6.7.5). 令

$$\widetilde{M}_t(C)=\int_0^t\int_S\gamma_s(x,C)M(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)+\int_0^t\int_{S\times\overline{S}}(I_C(x,\overline{x})-\gamma_s(x,C))N(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x,\mathrm{d}\,\overline{x}),\tag{7.4}$$

$\forall\ C\in\mathscr{B}(S)\times\mathscr{B}(\overline{S})$，其中$\gamma_s(x,C)=\int_{\overline{S}}I_C(x,\overline{x})\gamma_s(x,\mathrm{d}\,\overline{x})$.

则(7.4)右端两项均为连续的正交鞅测度. 又由N的取法知$\widetilde{M}$也是连续的正交鞅测度，其二次变差测度由下式给出：

$$\int_0^t\mathrm{d}K_s\Big[\int_S\gamma_s^2(x,C)q_s(\mathrm{d}x)+\int_{S\times\overline{S}}p_s(\mathrm{d}x,\mathrm{d}\,\overline{x})(I_C(x,\overline{x})-\gamma_s(x,C))^2\Big]$$

$$= \int_0^t \mathrm{d}K_s\Big[\int_S \gamma_s^2(x,C)q_s(\mathrm{d}x) + \int_{S\times\overline{S}} q_s(\mathrm{d}x)\gamma_s(x,\mathrm{d}\,\overline{x})(I_C(x,\overline{x})$$

$$+ \gamma_s^2(x,C) - 2\gamma_s(x,C)I_C(x,\overline{x}))\Big]$$

$$= \int_0^t \mathrm{d}K_s\int_S \gamma_s(x,C)q_s(\mathrm{d}x) \qquad \text{(因为 } \gamma_s(x,\cdot) \text{ 是概率)}$$

$$= \int_0^t \mathrm{d}K_s p_s(C),$$

即$\widetilde{M}$ 满足定理中的要求. 往证$\widetilde{M}$ 在 S 上的投影为 M.

对任意的 $C \in \mathscr{B}(S)$,我们有

$$I_C(x) - \int_{\overline{S}} \gamma_s(x,\mathrm{d}\,\overline{x})I_C(x) = 0,$$

因此,由(7.4)得$\widetilde{M}(C) = M(C)$. 证毕.

如果把平方可积鞅看作退化的鞅测度,我们可以把上述结论应用于连续的平方可积鞅. 于是,我们有如下推论:

6.7.7 推论 设 n_t 是连续的平方可积鞅,$\langle n\rangle_t = \int_0^t\int_S \sigma^2(s,x)q_s(\mathrm{d}x)\mathrm{d}K_s$,其中 K 是连续增过程,$(q_t(\mathrm{d}x))_{t\geqslant 0}$ 是可料的随机测度族,$\sigma(s,x) \in L^2(q_t(\mathrm{d}x)\mathrm{d}K_t)$. 又假设 $n_0 = 0$.

则存在 S 上二次变差测度为 $\sigma^2(s,x)q_s(\mathrm{d}x)\mathrm{d}K_t$ 的连续鞅测度 N,使得 $n_t = N_t(S)$.

证明 令

$$D = \left\{s > 0 : \int_S \sigma^2(s,x)q_s(\mathrm{d}x) \neq 0\right\},$$

并且定义

$$\gamma_s(\mathrm{d}x) = I_D(s)\frac{\sigma^2(s,x)q_s(\mathrm{d}x)}{\int_S \sigma^2(s,x)q_s(\mathrm{d}x)} + I_{D^c}(s)\delta_a(x), a \in S,$$

则$(\gamma_t(\mathrm{d}x))_{t\geqslant 0}$ 是可料的概率族. 对转移概率 $\gamma_t(\mathrm{d}x)$ 和非负连续增过程$\int_S \sigma^2(s,x)q_s(\mathrm{d}x)\mathrm{d}K_s$,利用定理 6.7.6 我们就有一个以

$$\gamma_t(\mathrm{d}x)\int_S \sigma^2(s,x)q_s(\mathrm{d}x)\mathrm{d}K_s = \sigma^2(s,x)q_s(\mathrm{d}x)\mathrm{d}K_s$$

为二次变差测度的连续鞅测度 N，使得 N 在某一单点集上的投影就是 n. 证毕.

利用定理 6.7.6 就可以得到我们的主要结论：每个连续鞅测度都可以表示为白噪声在时间变换下的象. 由此我们可以看出白噪声和鞅论中的 Brown 运动在可料表示性方面具有等同的地位.

6.7.8 定理 设 M 是$(\Omega,\mathscr{F},\mathscr{F}_t,P)$ 上以 $q_t(\mathrm{d}x)\mathrm{d}K_t$ 为二次变差测度的连续鞅测度，扩散测度 λ 和可料过程 φ 与定理 6.7.4 中的意义相同.

（Ⅰ）如果 K 是非随机的，则存在$(\Omega,\mathscr{F},\mathscr{F}_t,P)$ 的扩张概率空间$(\hat{\Omega},\hat{\mathscr{F}},\hat{\mathscr{F}}_t,\hat{P})$及其上的以 $\lambda(\mathrm{d}u)\mathrm{d}K_t$ 为二次变差测度的白噪声 $B_t(\hat{\omega},\mathrm{d}u)$，使得

$$M_t(f) = \int_0^t\int_U f(\varphi(s,u))B(\mathrm{d}s,\mathrm{d}u),\forall\ f\in L^2(q_s(\mathrm{d}x)\mathrm{d}K_s). \tag{7.5}$$

（Ⅱ）一般地，M 是白噪声在时间变换下的象.

证明 （Ⅰ）设可料的转移测度 $Q_t(x,\mathrm{d}u)$ 满足(7.2)，定义 $p_t(\mathrm{d}x,\mathrm{d}u) = Q_t(x,\mathrm{d}u)q_t(\mathrm{d}x)$，则有

$$\int_U I_B(\varphi(t,u))I_A(u)\lambda(\mathrm{d}u)$$

$$= \int_{S\times U} I_B(x)I_A(u)p_t(\mathrm{d}x,\mathrm{d}u),\quad \forall\ B\in\mathscr{B}(S),\quad A\in\mathscr{B}(U).$$

由定理 6.7.6，存在 $S\times U$ 上的二次变差测度为 $p_t(\mathrm{d}x,\mathrm{d}u)\mathrm{d}K_t$ 的连续鞅测度$\hat{M}$，使得$\hat{M}$在 S 上的投影为 M. 因为鞅测度 $N(\mathrm{d}t,\mathrm{d}u) = \int_S \hat{M}(\mathrm{d}t,\mathrm{d}x,\mathrm{d}u)$ 的二次变差测度

$$\int_S Q_t(x,\mathrm{d}u)q_t(\mathrm{d}x)\mathrm{d}K_t = \mathrm{d}K_t I_{\{\varphi(t,u)\neq\delta\}}\lambda(\mathrm{d}u),(\delta \text{ 为死点})$$

随机，所以 N 不是白噪声. 在附加的概率空间中，我们建立一个二次变差测度为 $\lambda(\mathrm{d}u)\mathrm{d}K_t$ 的白噪声 $W_t(\mathrm{d}u)$，考虑鞅测度

$$B_t(\mathrm{d}u) = N_t(\mathrm{d}u) + I_{\{\partial\}}(\varphi(t,u))W_t(\mathrm{d}u)$$

因为 B 的二次变差测度为 $\lambda(\mathrm{d}u)\mathrm{d}K_t$ 非随机，所以由定理 6.6.6 知 B 为白噪声.

对于 $f \in L^2(q_t(\mathrm{d}x)\mathrm{d}K_t)$，$f \circ \varphi \in L^2(\mathrm{d}K_t\lambda(\mathrm{d}u))$，并且有

$$\begin{aligned}
&\int_0^t\int_U f(\varphi(s,u))B(\mathrm{d}s,\mathrm{d}u) \\
&= \int_0^t\int_U f(\varphi(s,u))N(\mathrm{d}s,\mathrm{d}u) \\
&\quad + \int_0^t\int_U f(\varphi(s,u))I_{\{\partial\}}(\varphi(s,u))W(\mathrm{d}s,\mathrm{d}u) \\
&= \int_0^t\int_U f(\varphi(s,u))N(\mathrm{d}s,\mathrm{d}u) \\
&= \int_0^t\int_U f(\varphi(s,u))\int_S \hat{M}(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x,\mathrm{d}u) \\
&= \int_0^t\int_S\int_U f(\varphi(s,u))\,\hat{M}(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x,\mathrm{d}u).
\end{aligned}$$

因为

$$\begin{aligned}
&E\Big[\Big(\int_0^t\int_S\int_U f(\varphi(s,u))\,\hat{M}(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x,\mathrm{d}u) \\
&\quad - \int_0^t\int_S\int_U f(x)\,\hat{M}(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x,\mathrm{d}u)\Big)^2\Big] \\
&= E\Big[\int_0^t\int_S\int_U (f(\varphi(s,u)) - f(x))^2 Q_s(x,\mathrm{d}u)q_s(\mathrm{d}x)\mathrm{d}K_s\Big] \\
&= E\Big[\int_0^t\int_U (f(\varphi(s,x)) - f(\varphi(s,x)))^2\lambda(\mathrm{d}u)\mathrm{d}K_s\Big] = 0,
\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}
&\int_0^t\int_S\int_U f(\varphi(s,x))\,\hat{M}(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x,\mathrm{d}u) \\
&= \int_0^t\int_S\int_U f(x)\,\hat{M}(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x,\mathrm{d}u)
\end{aligned}$$

$$= \int_0^t \int_S f(x) M(\mathrm{d}s, \mathrm{d}x).$$

故(7.5)成立.

(Ⅱ)的证明和定理6.7.5的证明Ⅱ)相同. 证毕.

下面我们将研究向量值鞅测度的表示.

6.7.9 定理 设$\{M^i, i \leqslant n\}$是Lusin空间S上的n个连续的鞅测度, 并且

$$\langle M^i(\varphi), M^j(\psi)\rangle_t = \int_0^t \int_S \varphi(x)\psi(x) a_{ij}(s,x) q_s(\mathrm{d}x)\mathrm{d}K_s, \quad (7.6)$$

其中

$$a_{ij}(s,x) = \sum_{k=1}^n \sigma_{ik}(s,x)\sigma_{jk}(s,x), \quad i,j = 1,2,\cdots,n,$$

$\sigma_{ik} \in L^2(q_s(\mathrm{d}x)\mathrm{d}K_s)$, K是连续增过程, $(q_t(\mathrm{d}x))_{t\geqslant 0}$是可料的有限随机测度族. 则在扩张的概率空间上, 存在n个二次变差测度为$q_s(\mathrm{d}x)\mathrm{d}K_s$的相互正交的鞅测度$\widehat{M}^1, \cdots, \widehat{M}^n$满足

$$M_t^i(\varphi) = \sum_{k=1}^n \int_0^t \int_S \varphi(x)\sigma_{ik}(s,x)\widehat{M}^k(\mathrm{d}s, \mathrm{d}x), \quad i = 1,2,\cdots,n.$$

证明 不妨假设$\sigma(s,x) = a^{1/2}(s,x)$是$a(s,x)$的平方根. 定义

$$\widetilde{\sigma}(s,x) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} a^{1/2}(s,x)(a(s,x) + \varepsilon I)^{-1}, \forall (s,x) \in \boldsymbol{R}_+ \times S,$$

其中I是n阶单位阵. 令$E_R(s,x)$是$\boldsymbol{R}^n$到$a(s,x)(\boldsymbol{R}^n)$上的正交投影, 并且记$E_N(s,x) = I - E_R(s,x)$, 则显然$\widetilde{\sigma}(s,x)\sigma(s,x) = \sigma(s,x)\widetilde{\sigma}(s,x) = E_R(s,x)$. 设在某一附加的概率空间上定义二次变差测度均为$q_s(\mathrm{d}x)\mathrm{d}K_s$的$n$个相互正交的鞅测度$\widetilde{M}^k(\mathrm{d}s, \mathrm{d}x)$, $k \leqslant n$. 显然有

$$\begin{cases} \langle \widetilde{M}^i(f), M^j(g)\rangle_t = 0, \quad \forall\, f, g \in L^2(q_s(\mathrm{d}x)\mathrm{d}K_s) \\ \langle \widetilde{M}^i(f), \widetilde{M}^j(g)\rangle_t = \delta_{ij}\int_0^t\int_S f(x)g(x)q_s(\mathrm{d}x)\mathrm{d}K_s, \\ \qquad\qquad\qquad \forall\, f, g \in L^2(q_s(\mathrm{d}x)\mathrm{d}K_s). \end{cases} \tag{7.7}$$

对于 $i \in \{1,2,\cdots,n\}$，定义连续鞅测度

$$\hat{M}_t^i(f) = \sum_{k=1}^n \int_0^t\int_S \tilde{\sigma}_{ik}(s,x)f(x)M^k(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x) + \sum_{k=1}^n \int_0^t\int_S (E_N)_{ik}(s,x)f(x)\,\widetilde{M}^k(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x),$$

则由(7.6)和(7.7)得：$\forall\, f, g \in L^2(q_s(\mathrm{d}x)\mathrm{d}K_s)$，

$$\begin{aligned} &\langle \hat{M}^i(f), \hat{M}^j(g)\rangle \\ &= \int_0^t\int_S \sum_{k,l=1}^n \tilde{\sigma}_{ik}(s,x)\,\tilde{\sigma}_{jl}(s,x)a_{kl}(s,x)f(x)g(x)q_s(\mathrm{d}x)\mathrm{d}K_s \\ &\quad + \int_0^t\int_S \sum_{k,l=1}^n (E_N)_{ik}(s,x)(E_N)_{jl}(s,x)f(x)g(x)q_s(\mathrm{d}x)\mathrm{d}K_s \\ &= \int_0^t\int_S (E_R)_{ij}(s,x)f(x)g(x)q_s(\mathrm{d}x)\mathrm{d}K_s \\ &\quad + \int_0^t\int_S (E_N)_{ij}(s,x)f(x)g(x)q_s(\mathrm{d}x)\mathrm{d}K_s \\ &= \delta_{ij}\int_0^t\int_S f(x)g(x)q_s(\mathrm{d}x)\mathrm{d}K_s. \end{aligned}$$

因此，$\hat{M}^1,\cdots,\hat{M}^n$是 n 个相互正交的连续鞅测度. 又注意到 $\sigma(s,x)E_N(s,x) = E_N(s,x)\sigma(s,x) = 0$ 及

$$\begin{aligned} &\left\langle \sum_{k=1}^n \int_0^t\int_S (E_N)_{ik}(s,x)f(x)M^k(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x) \right\rangle_t \\ &= \int_0^t\int_S (E_N(s,x)a(s,x)E_N(s,x))_{ii}f^2(x)q_s(\mathrm{d}x)\mathrm{d}K_s = 0, \end{aligned}$$

我们有

$$\sum_{k=1}^{n}\int_0^t\int_S f(x)\sigma_{ik}(s,x)\ \widehat{M}^k(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)$$

$$= \sum_{k,l=1}^{n}\int_0^t\int_S f(x)\sigma_{ik}(s,x)\ \tilde{\sigma}_{kl}(s,x)M^l(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)$$

$$+ \sum_{k,l=1}^{n}\int_0^t\int_S f(x)\sigma_{ik}(s,x)(E_N)_{kl}(s,x)\ \widetilde{M}^l(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)$$

$$= \int_0^t\int_S f(x)M^i(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)$$

$$- \sum_{k=1}^{n}\int_0^t\int_S (E_N)_{ik}(s,x)f(x)M^k(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)$$

$$+ \sum_{l=1}^{n}\int_0^t\int_S f(x)(\sigma(s,x)E_N(s,x))_{il}\ \widetilde{M}^l(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)$$

$$= \int_0^t\int_S f(x)M^i(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x) = M_t^i(f).$$

证毕.

6.7.10 推论 如果利用定理 6.7.8 中的记号和结论，在 K 是非随机的假设下，则 $M^i, i\leqslant n$ 可以用 n 个相互正交的白噪声 B^1, $B^2,\cdots,B^n$ 表示，即

$$M_t^i(f) = \sum_{k=1}^{n}\int_0^t\int_U f(\varphi(s,u))\sigma_{ik}(s,\varphi(s,u))B^k(\mathrm{d}s,\mathrm{d}u).$$

下述定理是推论 6.7.7 在向量值连续平方可积鞅情形下的推广.

6.7.11 定理 设 $\{m^1,\cdots,m^n\}$ 是 n 个 0 初值的平方可积鞅，$\langle m^i,m^j\rangle_t = \int_0^t\int_S a_{ij}(s,x)q_s(\mathrm{d}x)\mathrm{d}K_s$，其中 $a(s,x) = \sigma(s,x)\cdot\sigma^\tau(s,x)$ 是 $\mathscr{P}\times\mathscr{B}(S)$ 可测的 $n\times n$ 矩阵，且 $a_{ij}(s,x)\in L^2(q_s(\mathrm{d}x)\mathrm{d}K_s), i,j\leqslant n$, K 是连续增过程，$(q_t(\mathrm{d}x))_{t\geqslant 0}$ 是可料的有限测度值过程. 则在扩张的概率空间上，存在 n 个连续的鞅测度 $\{M^1,\cdots,M^n\}$ 使得 $\forall\ B,C\in\mathscr{B}(S)$,

$$\langle M^i(B), M^j(C)\rangle = \int_0^t\int_S I_B(x)I_C(x)a_{ij}(s,x)q_s(\mathrm{d}x)\mathrm{d}K_s,$$

(7.8)

并且 $M_t^i(S) = m_t^i, t \geqslant 0$.

证明 （Ⅰ）假设对称阵 $\Delta(s) = \left(\int_S a_{ij}(s,x)q_s(\mathrm{d}x)\right)_{i,j\leqslant n}$ 是可逆的，记其逆矩阵为 $\delta(s)$. 对于 $f \in L^2(q_s(\mathrm{d}x)\mathrm{d}K_s)$，记 $Q(s,f)$ 为对称阵 $\left(\int_S f(x)a_{ij}(s,x)q_s(\mathrm{d}x)\right)_{i,j\leqslant n}$，则 $Q(s,1) = \Delta(s)$.

由定理 6.7.6，在空间 $\boldsymbol{R}_+ \times S \times \{1,2,\cdots,n\}$ 上我们可以构造一个以 $\sum_{i=1}^n q_s(\mathrm{d}x)\mathrm{d}K_s\delta_{\{i\}}(\mathrm{d}j)$ 为二次变差测度的鞅测度 N. 对于 $i \in \{1,2,\cdots,n\}$，定义

$$\widehat{N}_t^i(A) = \sum_{k=1}^n \int_0^t\int_A \sigma_{ik}(s,x)N(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x,\{k\}), \forall\ A \in \mathscr{B}(S).$$

则 $\widehat{N}^i$ 是鞅测度，并且对任意的 $f,g \in L^2(q_s(\mathrm{d}x)\mathrm{d}K_s)$，

$$\begin{aligned}
&\langle \widehat{N}^i(f), \widehat{N}^j(g)\rangle_t \\
&= \Big\langle \sum_{k=1}^n \int_0^t\int_S f(x)\sigma_{ik}(s,x)N(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x,\{k\}), \\
&\qquad \sum_{l=1}^n \int_0^t\int_S g(x)\sigma_{jl}(s,x)N(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x,\{l\}) \Big\rangle_t \\
&= \sum_{k,l=1}^n \int_0^t\int_S f(x)g(x)\sigma_{ik}(s,x)\sigma_{jl}(s,x)q_s(\mathrm{d}x)\mathrm{d}K_s\delta_{kl} \\
&= \sum_{k=1}^n \int_0^t\int_S f(x)g(x)\sigma_{ik}(s,x)\sigma_{jk}(s,x)q_s(\mathrm{d}x)\mathrm{d}K_s \\
&= \int_0^t\int_S f(x)g(x)a_{ij}(s,x)q_s(\mathrm{d}x)\mathrm{d}K_s.
\end{aligned} \tag{7.9}$$

从而对于 $i \in \{1,2,\cdots,n\}$，$f \in L^2(q_s(\mathrm{d}x)\mathrm{d}K_s)$，定义

$$M_t^i(f) = \sum_{k=1}^{n}\int_0^t [Q(s,f)\delta(s)]_{ik}\mathrm{d}m_s^k$$

$$+ \sum_{k=1}^{n}\int_0^t\int_S [f(x)I - Q(s,f)\delta(s)]_{ik}\,\widehat{N}^k(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x).$$

下证 $M^1,\cdots,M^n$ 满足定理的要求. 事实上,因为 $Q(s,S) = Q(s,1) = \Delta(s)$,所以有 $M^i(S) = m^i, i \leqslant n$. 下面我们来计算 $M^1,\cdots,M^n$ 的二次变差测度. 对 $\forall\ f,g \in L^2(q_s(\mathrm{d}x)\mathrm{d}K_s)$,由假设及(7.9)得

$$\begin{aligned}
&\langle M^i(f), M^j(g)\rangle_t \\
&= \sum_{k,l=1}^{n}\int_0^t [Q(s,f)\delta(s)]_{ik}[Q(s,g)\delta(s)]_{jl}\int_S a_{kl}(s,x)q_s(\mathrm{d}x)\mathrm{d}K_s \\
&\quad + \sum_{k,l=1}^{n}\int_0^t\int_S [f(x)I - Q(s,f)\delta(s)]_{ik} \\
&\quad \cdot [g(x)I - Q(s,g)\delta(s)]_{jl}a_{kl}(s,x)q_s(\mathrm{d}x)\mathrm{d}K_s \\
&= \int_0^t [Q(s,f)\delta(s)\Delta(s)(Q(s,g)\delta(s))^*]_{ij}\mathrm{d}K_s \\
&\quad + \int_0^t\int_S \{[f(x)I - Q(s,f)\delta(s)]a(s,x) \\
&\quad \cdot [g(x)I - Q(s,g)\delta(s)]^*\}_{ij}q_s(\mathrm{d}x)\mathrm{d}K_s.
\end{aligned} \tag{7.10}$$

因为 $Q(s,\cdot)$ 和 $\delta(s)$ 是对称的,所以有

$$\begin{aligned}
&Q(s,f)\delta(s)\Delta(s)[Q(s,g)\delta(s)]^* \\
&= Q(s,f)\delta(s)\Delta(s)\delta(s)Q(s,g) \\
&= Q(s,f)\delta(s)Q(s,g)
\end{aligned} \tag{7.11}$$

及

$$\begin{aligned}
&\int_S \{[f(x)I - Q(s,f)\delta(s)]a(s,x) \\
&\quad \cdot [g(x)I - Q(s,g)\delta(s)]^*\}q_s(\mathrm{d}x) \\
&= \int_S [f(x)I - Q(s,f)\delta(s)]a(s,x) \\
&\quad \cdot [g(x)I - \delta(s)Q(s,g)]q_s(\mathrm{d}x) \\
&= \int_S [f(x)g(x)a(s,x) - f(x)a(s,x)\delta(s)Q(s,g)
\end{aligned}$$

$$- Q(s,f)\delta(s)g(x)a(s,x)$$

$$+ Q(s,f)\delta(s)a(s,x)\delta(s)Q(s,g)]q_s(\mathrm{d}x)$$

$$= \int_S f(x)g(x)a(s,x)q_s(\mathrm{d}x) - Q(s,f)\delta(s)Q(s,g). \quad (7.12)$$

由(7.10)、(7.11)和(7.12)可推得

$$\langle M^i(f), M^j(g)\rangle_t = \int_S f(x)g(x)a_{ij}(s,x)q_s(\mathrm{d}x).$$

(Ⅱ)当 $\Delta(s)$ 不可逆时，使用定理 6.7.9 的证明方法，我们可以引入对称矩阵 $\widetilde{\delta}$，使得 $\forall\ s \geqslant 0$，$\widetilde{\delta}(s)\Delta(s) = \Delta(s)\widetilde{\delta}(s) = E_R(s)$，其中 $E_R(s)$ 是 $\boldsymbol{R}^n$ 到 $\Delta(s)(\boldsymbol{R}^n)$ 的投影矩阵. 令 $E_N(s) = I - E_R(s)$，则

$$E_N(s)\Delta(s) = 0,\ \widetilde{\delta}(s)\Delta(s)\widetilde{\delta}(s) = 0. \quad (7.13)$$

如果定义

$$M_t^i(f) = \sum_{k=1}^n \int_0^t [Q(s,f)\widetilde{\delta}(s)]_{ik}\mathrm{d}m_s^k + \sum_{k=1}^n \int_0^t\int_S [f(x) - Q(s,f)\widetilde{\delta}(s)]_{ik}\widehat{N}^k(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x),$$

则鞅测度 $M^1,\cdots,M^n$ 满足定理的要求. 事实上，因为

$$\begin{aligned} M_t^i(S) &= \sum_{k=1}^n \int_0^t [\Delta(s)\widetilde{\delta}(s)]_{ik}\mathrm{d}m_s^k + \sum_{k=1}^n \int_0^t\int_S [I - \Delta(s)\widetilde{\delta}(s)]_{ik}\widehat{N}^k(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x) \\ &= \sum_{k=1}^n \int_0^t (E_R(s))_{ik}\mathrm{d}m_s^k + \sum_{k=1}^n \int_0^t\int_S (E_N(s))_{ik}\widehat{N}^k(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x) \\ &= m_t^i - \sum_{k=1}^n \int_0^t (E_N(s))_{ik}\mathrm{d}m_s^k + \sum_{k=1}^n \int_0^t\int_S (E_N(s))_{ik}\widehat{N}^k(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x), \end{aligned} \quad (7.14)$$

而由(7.13)得

$$\left\langle \sum_{k=1}^{n}\int_0^{\cdot}(E_N(s))_{ik}\mathrm{d}m_s^k \right\rangle_t$$

$$=\left\langle \sum_{k=1}^{n}\int_0^{\cdot}\int_S(E_N(s))_{ik}\ \widehat{N}^k(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x) \right\rangle_t$$

$$= \sum_{k,l=1}^{n}\int_0^t(E_N(s))_{ik}(E_N(s))_{jl}\int_S a_{kl}(s,x)q_s(\mathrm{d}x)\mathrm{d}K_s$$

$$= \sum_{l=1}^{n}\int_0^t[E_N(s)\Delta(s)]_{il}(E_N(s))_{jl}\mathrm{d}K_s = 0. \tag{7.15}$$

由(7.14)和(7.15)可推得$M^i(S)=m^i, i\leqslant n$. 利用(7.13),和(Ⅰ)中同样计算可得

$$\langle M^i(f),M^j(g)\rangle_t = \int_0^t\int_S f(x)g(x)a_{ij}(s,x)q_s(\mathrm{d}x)\mathrm{d}K_s,$$

$$\forall\ f,g\in L^2(q_s(\mathrm{d}x)\mathrm{d}K_s).$$

证毕.

应用定理6.7.9和定理6.7.11,可立即得到我们的主要定理:

6.7.12 定理 设$\{m^1,\cdots,m^n\}$是n个连续的平方可积鞅,

$$\langle m^i,m^j\rangle_t = \int_0^t\int_S a_{ij}(s,x)q_s(\mathrm{d}x)\mathrm{d}K_s,$$

则在扩张的概率空间上存在n个二次变差测度为$q_s(\mathrm{d}x)\mathrm{d}K_s$的连续鞅测度$\widehat{M}^1,\cdots,\widehat{M}^n$,使得

$$m_t^i = \sum_{k=1}^{n}\int_0^t\int_S\sigma_{ik}(s,x)\ \widehat{M}^k(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x).$$

6.8 鞅问题的研究

鞅测度理论建立的动因之一是研究下述问题的解的存在性. 设$(\Omega,\mathscr{F},\mathscr{F}_t,P)$是带流的概率空间,$q$是$\mathscr{F}_t$-可料的有限测度值过程. 我们称定义在$(\Omega,\mathscr{F},\mathscr{F}_t,P)$的一个扩张空间上的$(X,\widetilde{P})$

是鞅问题($\boldsymbol{P}$)的解,如果 X 连续,并且 $\forall\ f \in C_b^2(\boldsymbol{R}^n)$,

$$(\boldsymbol{P}):\ f(X_t) - f(X_0) - \int_0^t \int_S Lf(s,X_s,x)q_s(\mathrm{d}x)\mathrm{d}s$$

关于 $\widetilde{P}$ 是鞅,其中 S 是 Lusin 空间,L 是定义在 $\boldsymbol{R}_+ \times \boldsymbol{R}^n \times S$ 上的椭圆算子:

$$Lf(s,y,x) = \left(\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^n a_{ij}\frac{\partial^2 f}{\partial y_i \partial y_j} + \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial f}{\partial y_i}\right)(s,y,x),$$

$a(s,y,x) = \sigma(s,y,x)\sigma^*(s,y,x)$ 是定义在 $\boldsymbol{R}_+ \times \boldsymbol{R}^n \times S$ 上的有界系数.

在研究鞅问题时,我们首先遇到的困难是生成算子的积分形式;其次是测度 q 的随机性;因此我们必须分两步来解决问题.第一步假设 q 非随机,我们给出鞅问题($\boldsymbol{P}$)的解关于白噪声的表示.第二步我们拓广 q 到随机,给出鞅问题($\boldsymbol{P}$)的解关于鞅测度的表示,并研究鞅问题($\boldsymbol{P}$)的解的唯一性.

(一) 假设测度 q 非随机

为了简明,不妨假设 $n = 1$.在这种情况下,鞅问题($\boldsymbol{P}$)的解总可以表示为

$$X_t = X_0 + \int_0^t \sqrt{\int_S \sigma^2(s,X_s,x)q_s(\mathrm{d}x)}\,\mathrm{d}B_s + \int_0^t \int_S b(s,X_s,x)q_s(\mathrm{d}x)\mathrm{d}s, \tag{8.1}$$

其中 B 是 $(\Omega,\mathscr{F},\mathscr{F}_t,P)$ 上的 Brown 运动.既使在 σ 和 b 满足 Lipschitz 连续的条件下,我们也无法判断随机微分方程(8.1)的解的存在和唯一性.因此这种表示方法不适应于这个问题.另一种思想方法是按定理 6.7.11 把非随机测度 $q_s(\mathrm{d}x)\mathrm{d}s$ 看作为定义在 $(\Omega,\mathscr{F},\mathscr{F}_t,P)$ 的扩张空间上的白噪声 W 的二次变差测度,鞅问题($\boldsymbol{P}$)的解就等价于随机微分方程

$$X_t = X_0 + \int_0^t \int_S \sigma(s,X_s,x)W(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)$$

$$+\int_0^t\int_S b(s,X_s,x)q_s(\mathrm{d}x)\mathrm{d}s \tag{8.2}$$

的解. 在 σ 和 b 满足 Lipschitz 连续的条件下,方程(8.2) 的解的存在性和唯一性即可得到.

一般地,我们有如下结论:

6.8.1 定理 假设 q 非随机.

(Ⅰ) 鞅问题(P) 解的存在性等价于下列随机微分方程组

$$\begin{cases}\mathrm{d}X_t^1 = \sum_{k=1}^n\int_S\sigma_{1k}(t,X_t,x)W^k(\mathrm{d}t,\mathrm{d}x)+\int_S b_1(t,X_t,x)q_t(\mathrm{d}x)\mathrm{d}t,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \mathrm{d}X_t^n = \sum_{k=1}^n\int_S\sigma_{nk}(t,X_t,x)W^k(\mathrm{d}t,\mathrm{d}x)+\int_S b_n(t,X_t,x)q_t(\mathrm{d}x)\mathrm{d}t\end{cases} \tag{8.3}$$

的解的存在性,其中 $W^1,\cdots,W^n$ 是定义在$(\Omega,\mathscr{F},\mathscr{F}_t,P)$ 的扩张空间上 n 个以 $q_s(\mathrm{d}x)\mathrm{d}s$ 为二次变差测度相互正交的白噪声.

(Ⅱ) 如果 σ 和 b 关于第二个变元满足 Lipschitz 连续条件,关于第一变元 t 和第三变元 $x\in S$ 一致连续,则随机微分方程组(8.3) 存在按轨道的唯一解.

证明 方程(8.3) 的表示是定理 6.7.11 的特例. 由定理 6.6.6 知白噪声的分布完全由其二次变差测度确定. 因此本定理的证明可以利用 Ikeda 和 Watanabe[14](P151) 或龚光鲁[11](第三章) 中的同样方法给出. 故略去证明. 有兴趣的读者可以参看[14] 和[11].

(二) 测度 q 随机

现在我们来拓广上面观点,当 q 是随机时,定理 6.7.11 就保证了我们可以在鞅问题(P) 的解和鞅测度之间架起一座桥梁. 这就是下述的定理:

6.8.2 定理 设 X 是 n 维 $\mathscr{F}_t$- 适应的连续过程,并且是鞅

问题($\boldsymbol{P}$)的解. 则在$(\Omega,\mathscr{F},\mathscr{F}_t,P)$的扩张的概率空间上存在以$q_s(\mathrm{d}x)\mathrm{d}s$为二次变差测度的$n$个相互正交的连续鞅测度$M^1,\cdots,M^n$,使得$X$满足下列随机微分方程组:

$$\begin{cases}\mathrm{d}X_t^1=\sum_{k=1}^n\int_S\sigma_{1k}(t,X_t,x)M^k(\mathrm{d}t,\mathrm{d}x)+\int_S b_1(t,X_t,x)q_t(\mathrm{d}x)\mathrm{d}t\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \mathrm{d}X_t^n=\sum_{k=1}^n\int_S\sigma_{nk}(t,X_t,x)M^k(\mathrm{d}t,\mathrm{d}x)+\int_S b_n(t,X_t,x)q_t(\mathrm{d}x)\mathrm{d}t.\end{cases}\tag{8.4}$$

证明　证明的方法和定理6.8.1相同. 有兴趣的读者可参看[11]或[14].

问题($\boldsymbol{P}$)是一个带有随机系数q的鞅问题,这是一个不易描述的问题. 因为以$q_s(\mathrm{d}x)\mathrm{d}s$为二次变差测度的正交鞅测度有无穷多个,所以在一个空间上,随机测度q给出了无限多个解. 无论怎样,只要n-维随机过程$(X_t)_{t\geq 0}$满足方程(8.4),则由$It\hat{o}$公式知X满足($\boldsymbol{P}$).

对于给定的n个相互正交的正交鞅测度$M^1,\cdots,M^n$,如果σ和b满足一致Lipschitz条件,则方程(8.4)有唯一解. 这可以仿照随机微分方程中通常的证明方法得到(参见[14],P165).

6.9　一个例子

在6.2的开始,我们曾经说过不是所有鞅测度都能定义随机积分,本节我们就给出这样鞅测度的一个例子.

设随机变量ξ服从[0,1]上的均匀分布. 记$s_n=1-\frac{1}{n}$,$n\geq 1$,

$\mathscr{F}_{s_n}=\sigma\{[2^n\xi]\}$,([$x$]表示不超过$x$的最大整数)

$\mathscr{F}_t=\mathscr{F}_{s_n}$,$s_n\leqslant t<s_{n+1}$,

则$(\mathscr{F}_t)_{t\geq 0}$是单调上升的$\sigma$-域流. 定义

$$M_t(A) = P(\{\xi \in A | \mathscr{F}_t\}), \quad A \subset [0,1], \quad t \geqslant 0,$$

则M是一鞅测度.

记$K = [2^n\xi]$, 令$J_n = [K2^{-n}, (K+1)2^{-n})$、$H_n = [K2^{-n}, (K+1)2^{-n+1})$和$L_n = [(K+1)2^{-(n+1)}, (K+1)2^{-n})$, 则$J_n = H_n \cup L_n$, 并且它们均为$\mathscr{F}_{s_n}$可测. 显然有$\xi \in J_n, \forall\, n \geqslant 1$.

如果$t < 1$, 则存在$n \geqslant 1$使得$s_n \leqslant t < s_{n+1}$, J_n是$\mathscr{F}_{s_n}$可测, 并且ξ关于$\mathscr{F}_t = \mathscr{F}_{s_n}$的条件分布是$J_n$上的均匀分布. 因此我们有结论:

(A)　对于$t < 1$, 存在$n \geqslant 1$使得$M_t(\mathrm{d}x) = 2^n I_{J_n}(x)\mathrm{d}x$.

如果$t \geqslant 1$, 则ξ是$\mathscr{F}_t$可测, 从而有:

(B)　对于$t \geqslant 1$, $M_t(A) = I_A(\xi)$.

因此, 对于$t \geqslant 0$, $M_t(\cdot)$是全变差为1的实值测度. 但是对于鞅测度M, 我们无法定义随机积分, 即存在有界可料过程f, 使得随机积分$\int f(s,x)M(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)$不存在.

令

$$f(t,x) = \begin{cases} 2, & \text{如果 } x \in H_n, \text{并且 } s_n \leqslant t < s_{n+1}, \\ -2, & \text{如果 } x \in L_n, \text{并且 } s_n \leqslant t < s_{n+1}, \\ 0, & \text{其它}, \end{cases}$$

则关于变量t, $f(t,x)$是左连续的. 因此f是可料过程.

下面证明$f.M$不存在. 事实上, 假设$f.M$存在, 由于M_t是在$[s_n, s_{n+1}]$上为常值的跳过程, 其跳跃点为s_n, $n \geqslant 1$, f是简单函数. 利用性质(A), 我们可以直接计算出

$$\begin{aligned} &\int_{[0,1]\times[s_n,s_{n+1}]} f(t,x)M(\mathrm{d}t,\mathrm{d}x) \\ &= 2[M_{s_{n+1}}(H_n) - M_{s_n}(H_n)] - 2[M_{s_{n+1}}(L_n) - M_{s_n}(L_n)] \\ &= I_{\{J_{n+1}=H_n\}} - I_{\{J_{n+1}=L_n\}}. \end{aligned} \tag{9.1}$$

因为 J_{n+1} 以 $\frac{1}{2}$ 的概率取 H_n 或 L_n，所以(9.1)以 $\frac{1}{2}$ 的概率取 1 或者 -1. 如果 $\int_{[0,1]\times(0,1)} f(s,x)M(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)$ 存在，则

$$\begin{aligned}&\int_{[0,1]\times(0,1)} f(s,x)M(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{[0,1]\times(s_n,s_{n+1}]} f(t,x)M(\mathrm{d}t,\mathrm{d}x).\end{aligned}$$

但上式右端级数每一项的绝对值均为 1. 从而

$$\int_{[0,1]\times(0,1)} f(s,x)M(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)$$

不可能存在.

下面我们将说明 M 的控制测度 K 也不存在. 为此，我们来计算 M 的协方差测度 Q. 记 $N_t=M_t(\mathrm{d}x)M_t(\mathrm{d}y)$，对于 $t=s_{n+1}$，

$$\begin{aligned}&Q(\{s_{n+1}\},\mathrm{d}x,\mathrm{d}y)\\&=\Delta\langle M(\mathrm{d}x),M(\mathrm{d}y)\rangle_{s_{n+1}}=N_{s_{n+1}}-E\{N_{s_{n+1}}|\mathscr{F}_{s_n}\}\\&=[4^nI_{\{x,y\in J_{n+1}\}}-4^{n+1}P\{x,y\in J_{n+1}|\mathscr{F}_{s_n}\}]\mathrm{d}x\mathrm{d}y.\qquad(9.2)\end{aligned}$$

如果 x 和 y 都在 H_n 中，或者都在 L_n 中，则由(A)得

$$P\{x,y\in J_{n+1}|\mathscr{F}_{s_n}\}=\frac{1}{2}.$$

如果 x 和 y 一个在 H_n 中，另一个在 L_n 中，由 J_{n+1} 等于 H_n 或 L_n 可知 $P\{x,y\in J_{n+1}|\mathscr{F}_{s_n}\}=0$. 因此由(9.2)得

$$\begin{aligned}&Q(\{s_{n+1}\},\mathrm{d}x,\mathrm{d}y)\\&=4^n[I_{\{x,y\in J_{n+1}\}}-2I_{\{x,y\in H_n\}}-2I_{\{x,y\in L_n\}}]\mathrm{d}x\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

而在 J_n 上，上式右端的方括号内是 ± 1，而在 J_n 之外为 0，所以

$$|Q(\{s_{n+1}\},\mathrm{d}x,\mathrm{d}y)|=4^nI_{\{x,y\in J_n\}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

故得

$$|Q(\{s_n\}\times[0,1]\times[0,1])|=4^n\int_0^1\int_0^1 I_{J_n}(x)I_{J_n}(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=1.$$

如果控制测度 K 存在，它必然控制 Q，但是

$$
\begin{aligned}
&K([0,1]\times[0,1]\times[0,1]) \\
\geqslant &|Q([0,1]\times[0,1]\times[0,1])| \\
\geqslant &\sum_{n=1}^{\infty}|Q(\{s_{n+1}\},\mathrm{d}x,\mathrm{d}y)| = \sum_{n=1}^{\infty}1 = \infty.
\end{aligned}
$$

此不可能，故 K 不存在.

7 Hilbert 空间值鞅测度

M. Métivier 在[25]中对取值于 Hilbert 空间的半鞅进行了系统的研究，同时 M. Métivier 和 J. Y. Ouvrard 又对 Hilbert 空间值鞅的表示性进行了研究，受他们的启发，本书作者对取值于抽象空间的鞅测度也进行了研究. M. Métivier 在[25]中指出，要使抽象空间值鞅的尖括号过程存在，这个鞅至多只能取 Hilbert 空间值. 因此，我们只讨论取值 Hilbert 空间值鞅测度. 类似于实值鞅测度的讨论，本章首先引进 Hilbert 空间值鞅测度，再研究关于鞅测度的随机积分、独立增量鞅测度与其可料特征之间的关系，最后给出鞅测度的表示定理. 本章主要取材于[39].

7.1 预备知识

本章用 H、H_1、H_2、$G\cdots$ 等表示实可分的 Hilbert 空间. 记 $\mathscr{L}(H_1,H_2)$、$\mathscr{L}_1(H_1,H_2)$ 和 $\mathscr{L}_2(H_1,H_2)$ 分别为 H_1 到 H_2 的有界算子空间、核算子空间和 Hilbert-Schmidt 算子空间，它们的范数分别记为 $\|\cdot\|$、$\|\cdot\|_1$ 和 $\|\cdot\|_2$. 记 $H_1\hat{\otimes}_1H_2$ 和 $H_1\hat{\otimes}_2H_2$ 分别

表示以迹范数 $\|\cdot\|_1$ 和 Hilbert 范数 $\|\cdot\|_2$ 的张量积空间，其中用 $\langle\cdot,\cdot\rangle_{H_1\hat{\otimes}_2 H}$ 表示 $\boldsymbol{H}_1\hat{\otimes}_2\boldsymbol{H}$ 的内积.

我们知道 $\mathscr{L}_1(\boldsymbol{H}_1,\boldsymbol{H}_2)$ 和 $\boldsymbol{H}_1\hat{\otimes}_1\boldsymbol{H}_2$ 同构，$\boldsymbol{H}_1\hat{\otimes}_1\boldsymbol{H}$ 到 $\mathscr{L}_1(\boldsymbol{H}_1,\boldsymbol{H}_2)$ 的同构映射为

$$h_1\otimes h_2\longrightarrow\langle h_1,\cdot\rangle_{H_1}h_2.$$

对于 $\hat{A}\in\boldsymbol{H}_1\hat{\otimes}_1\boldsymbol{H}_2$，我们记 $A\in\mathscr{L}_1(\boldsymbol{H}_1,\boldsymbol{H}_2)$ 为 $\hat{A}$ 在这个同构映射下的像. 同样地，对 $\hat{A}\in\boldsymbol{H}_1\hat{\otimes}_2\boldsymbol{H}_2$，记 $A\in\mathscr{L}_2(\boldsymbol{H}_1,\boldsymbol{H}_2)$ 为 $\hat{A}$ 在同构映射下的像. 则

$$\langle\hat{A},h_1\otimes h_2\rangle_{H_1\hat{\otimes}_2 H_2}=\langle Ah_1,h_2\rangle_{H_2},\forall\ h_1\in\boldsymbol{H}_1,h_2\in\boldsymbol{H}_2.\quad(1.1)$$

对于 $A\in\mathscr{L}(\boldsymbol{H}_1,\boldsymbol{H}_2)$、$B\in\mathscr{L}(\boldsymbol{G}_1,\boldsymbol{G}_2)$，定义 $A\otimes B\in\mathscr{L}(\boldsymbol{H}_1\hat{\otimes}_1\boldsymbol{G}_1,\boldsymbol{H}_2\hat{\otimes}_1\boldsymbol{G}_2)$，使得对任意 $C\in\mathscr{L}_1(\boldsymbol{H}_1,\boldsymbol{G}_1)$ 有

$$(A\otimes B)(\hat{C})=\widehat{BCA^*}.\qquad(1.2)$$

记 $\mathscr{L}^+(\boldsymbol{H}_1)$ 和 $\mathscr{L}_1^+(\boldsymbol{H}_1)$ 分别为 $\boldsymbol{H}_1$ 上自伴正算子和自伴正的核算子所组成的锥体.

如果 $A\in\mathscr{L}(\boldsymbol{H})$，我们记 A^+ 为 A 的广义逆算子. 如果 A 的值域 $R(A)$ 非闭，则 A^+ 不是有限线性算子. 但对于 $A\in\mathscr{L}_1^+(\boldsymbol{H})$，如果单调递减正序列 $\{\lambda_n\}_{n\geqslant 0}$ 及 $\boldsymbol{H}$ 的正交向量族 $\{e_n\}_{n\geqslant 0}$ 满足 $Ae_n=\lambda_n e_n,n\geqslant 0$，则我们可以如下定义 A 的广义逆算子 A^+：

$$A^+h=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n}\langle h,e_n\rangle e_n,\qquad(1.3)$$

$h\in\mathscr{D}(A^+)=\left\{h\in\boldsymbol{H}:\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\langle h_1,e_n\rangle^2}{\lambda_n^2}<\infty\right\}$. A^+ 是一个无限算子.

7.2 Hilbert 空间值鞅测度的定义

设 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 是一概率空间，S 是 Lusin 空间. 假设 $U(\omega,A)$

是定义在 $\Omega \times \mathscr{B}(S)$ 上的 $\boldsymbol{H}$-值可测函数，并且满足条件：

(Ⅰ) $E\|U(A)\|^2 < \infty$, $\forall A \in \mathscr{B}(S)$,

(Ⅱ) $U(A \cup B) = U(A) + U(B)$, $\forall A, B \in \mathscr{B}(S)$, $A \cap B = \varnothing$.

如果对于任意的 $\{A_n\}_{n\geqslant 1} \subset \mathscr{B}(S)$, $A_n \downarrow \varnothing$, 都有 $E\|U(A_n)\|^2 \to 0, n \to 0$, 则称 U 是可列可加的. 可列可加的 $\boldsymbol{H}$-值函数 U 称为是 $L_H^2(\Omega, \mathscr{F}, P)$-值测度.

7.2.1 定义 设 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathscr{F}_t, P)$ 为带流的概率空间，并且 $(\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$ 满足通常条件.

(1) $\{M_t(A), t \geqslant 0, A \in \mathscr{B}(S)\}$ 称为是 $\mathscr{F}_t$-适应的 $\boldsymbol{H}$-值鞅测度，如果下列条件成立：

(Ⅰ) $M_0(A) = 0$, $\forall A \in \mathscr{B}(S)$,

(Ⅱ) 对任意的 $A \in \mathscr{B}(S)$, $M(A)$ 是 $\mathscr{F}_t$-适应的 $\boldsymbol{H}$-值鞅,

(Ⅲ) 对任意的 $t > 0$, $M_t(\cdot)$ 是 L_H^2-值测度.

(2) 如果对任意的 A、$B \in \mathscr{B}(S)$, $A \cap B = \varnothing$, 都有 $\boldsymbol{H}$-值鞅 $M(A)$ 和 $M(B)$ 正交，即 $\langle\!\langle M(A), M(B) \rangle\!\rangle = 0$, 则称 $\boldsymbol{H}$-值鞅测度 M 是正交的.

(3) 如果对任意的 A、$B \in \mathscr{B}(S)$, $A \cap B = \varnothing$, $\boldsymbol{H}$-值鞅 $M(A)$ 和 $M(B)$ 的方括号过程 $[\![M(A), M(B)]\!] = 0$, 则称 $\boldsymbol{H}$-值鞅测度 M 是强正交的.

由定义立即可得强正交鞅测度一定是正交鞅测度.

7.2.2 定义 设 M 是 $\boldsymbol{H}$-值鞅测度. 如果对任意的 $A \in \mathscr{B}(S)$, $M(A)$ 是连续的 $\boldsymbol{H}$-值鞅，则称 M 是连续的. 如果对任意的 $A \in \mathscr{B}(S)$, $M(A)$ 右连左极，则称 M 是右连左极的.

显然，连续鞅测度是右连左极鞅测度. 本书我们只讨论右连左极鞅测度.

7.2.3 定义 设 M 和 N 分别为 S 上 $\mathscr{F}_t$-适应的 $\boldsymbol{H}$-值鞅测度和 G 值鞅测度.

(Ⅰ) 如果对任意的 $A、B\in\mathscr{B}(S)$，$\boldsymbol{H}$- 值鞅 $M(A)$ 与 $\boldsymbol{G}$- 值鞅 $N(B)$ 相互正交，即 $M(A)\otimes N(B)$ 是 $\boldsymbol{H}\hat{\otimes}_1\boldsymbol{G}$- 值鞅，称 M 和 N 相互正交.

(Ⅱ) 如果对任意的 $A、B\in\mathscr{B}(S)$，$A\cap B=\varnothing$，$\boldsymbol{H}$- 值鞅 $M(A)$ 与 $\boldsymbol{G}$- 值鞅 $N(B)$ 相互正交，称 M 和 N 是弱正交.

显然，由两个鞅测度正交可推得它们是弱正交.

由定义我们立即可得下述性质：

7.2.4 性质 设 M 和 N 是两个 $\boldsymbol{H}$- 值正交鞅测度，如果 M 和 N 弱正交，则 $M+N$ 仍是 $\boldsymbol{H}$- 值正交鞅测度.

设 M 是 S 上的 $\boldsymbol{H}$- 值正交鞅测度，则由 $\boldsymbol{H}$- 值鞅理论知：对任意的 $A\in\mathscr{B}(S)$，存在取值于 $\boldsymbol{H}\hat{\otimes}_1\boldsymbol{H}$ 的对称正定元的可料过程 $Q_A(\omega,t)$ 和一可料增过程 $\langle M(A)\rangle$，使得 $\langle\!\langle M(A)\rangle\!\rangle_t=\int_0^t Q_A(\omega,s)\mathrm{d}\langle M(A)\rangle_s$. 我们可以对这两个过程进行规则化，使之成为 $\mathscr{B}_+\times\mathscr{B}(S)$ 上的 $\boldsymbol{H}\hat{\otimes}_1\boldsymbol{H}$- 值测度. 这就是下述定理.

7.2.5 定理 (Ⅰ) 设 M 是 $\mathscr{F}_t$- 适应的 $\boldsymbol{H}$- 值正交鞅测度，则存在 $\mathscr{B}_+\times\mathscr{B}(S)$ 上可料的 σ- 有限正测度 $\upsilon(\mathrm{d}s、\mathrm{d}x)$ 及 $\mathscr{P}\times\mathscr{B}(S)$ 可测的 $\boldsymbol{H}\hat{\otimes}_1\boldsymbol{H}$- 值过程 $Q(s,x)$，使得对任意的 $A\in\mathscr{B}(S)$，过程 $(\upsilon([0,t]\times A))_{t\geqslant0}$ 和 $\int_0^{\cdot}\int_A Q(s,x)\upsilon(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)$ 可料，并且满足：对任意的 $t>0$，$A\in\mathscr{B}(S)$，

$$\upsilon([0,t]\times A)=\langle M(A)\rangle_t,$$

$$\int_0^t\int_A Q(s,x)\upsilon(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)=\langle\!\langle M(A)\rangle\!\rangle_t,\quad P\text{-}a.s.$$

如果记 $\upsilon=\langle M\rangle$，$\bar{\upsilon}=\langle\!\langle M\rangle\!\rangle$，则显然有 $\upsilon=Tr\,\bar{\upsilon}$.

(Ⅱ) 设 M 是 $\mathscr{F}_t$- 适应的强正交鞅测度，则存在可选的 σ- 有限的随机测度 $\mu(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)$ 及取 $\boldsymbol{H}\hat{\otimes}_1\boldsymbol{H}$ 中对称正定值 σ- 有限的可选随机测度 $\bar{\mu}(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)$，使得对于任意的 $A\in\mathscr{B}(S)$，随机过程 $(\mu([0,t]$

$\times A))_{t\geqslant 0}$ 和 $(\overline{\mu}([0,t]\times A))_{t\geqslant 0}$ 均可选，并且满足：对任意的 $t>0$ 及 $A\in\mathscr{B}(S)$，

$$\mu([0,t]\times A)=[M(A)]_t,$$
$$\overline{\mu}([0,t]\times A)=[\![M(A)]\!]_t,\quad P\text{-}a.s.,$$

其中 μ 和 $\overline{\mu}$ 的可料对偶投影分别为 υ 和 $\overline{\upsilon}$. 以后我们记 $\mu=[M]$，$\overline{\mu}=[\![M]\!]$.

证明　(Ⅰ) 同定理 6.4.1 的证明一样我们可以得到 σ- 有限的可料随机测度 υ 的存在性. 下面我们只要证明随机过程 Q 的存在性.

对于 $0\leqslant s<t$，$F\in\mathscr{F}_s$，$A\in\mathscr{B}(S)$，令

$$\overline{\upsilon}(F\times]s,t]\times A)=EI_F[M_t(A)-M_s(A)]^{\otimes 2}.$$

对于 $A=\bigcup_{k=1}^{n}F_k\times]s_k,t_k]\times A_k$，其中 $\{F_k\times]s_k,t_k]\times A_k,k\leqslant n\}$ 两两互不相交，$F_k\in\mathscr{F}_{s_k}$，$A_k\in\mathscr{B}(S)$，$k\leqslant n$，我们有

$$\|\overline{\upsilon}(A)\|_1\leqslant\sum_{k=1}^{n}\|\overline{\upsilon}(F_k\times]s_k,t_k]\times A_k)\|_1$$
$$\leqslant\sum_{k=1}^{n}EI_{F_k}\|M_{t_k}(A_k)-M_{s_k}(A_k)\|^2=(\upsilon\times P)(A).$$

因为 $\mathscr{P}\times\mathscr{B}(S)$ 是由所有形如上述的 A 生成，所以由单调类定理可得

$$\|\overline{\upsilon}(A)\|_1\leqslant(\upsilon\times P)(A),\quad\forall A\in\mathscr{P}\times\mathscr{B}(S).\qquad(2.1)$$

由于 $\boldsymbol{H}\hat{\otimes}_1\boldsymbol{H}$ 是某一可分 Banach 空间的对偶空间，因此 $\boldsymbol{H}\hat{\otimes}_1\boldsymbol{H}$ 具有 Radon - Nikodym 性质. 由(2.1)可知存在 $\mathscr{P}\times\mathscr{B}(S)$ 可测的 $\boldsymbol{H}\hat{\otimes}_1\boldsymbol{H}$- 值过程 $Q(s,x)$，使得对任意的 $t>0$，$A\in\mathscr{B}(S)$，

$$\int_0^t\int_A Q(s,x)\upsilon(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)=\langle\!\langle M(A)\rangle\!\rangle_t,\quad P\text{-}a.s.$$

(Ⅱ) 的证明和(Ⅰ)的证明类似，故略去. 证毕.

设 M 是 $\boldsymbol{H}$- 值正交鞅测度，$\upsilon=\langle M\rangle$，$Q$ 是定理 7.2.5(Ⅰ)中的

可料 $\boldsymbol{H}\hat{\otimes}_1\boldsymbol{H}$- 值过程，则对于任意的 $t>0$，A、$B\in\mathscr{B}(S)$，我们有

$$\langle\!\langle M(A),M(B)\rangle\!\rangle_t=\langle\!\langle M(A\cap B)\rangle\!\rangle_t$$

$$=\int_0^t\int_{A\cap B}Q(s,x)v(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x),\quad P\text{-}a.s.,$$

显然可料测度 $v(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)$ 和过程 Q 完全确定了正交鞅测度 M 的尖括号过程.

7.2.6 定义 设 M 是正交鞅测度，$\langle M\rangle=v$，如果 $Ev(\boldsymbol{R}_+\times S)<\infty$，称 M 是可积的. 如果存在停时列 $T_n\uparrow\infty$，单调上升的紧集列 $K_n\uparrow S$，使得 $Ev([0,T_n]\times K_n)<\infty$，$\forall\, n\geqslant 1$，称 M 是局部可积的.

设 M 是鞅测度. 假设对于任意的 $t>0$，$M(\{t\}\times \mathrm{d}s)$ 是 $\mathscr{B}(S)$ 上的 $\boldsymbol{H}$- 值随机测度，使得 $M(\{t\}\times\mathrm{d}x)=M_t(\mathrm{d}x)-M_{t-}(\mathrm{d}x)$，我们称 $M(\{t\}\times\mathrm{d}x)$ 是 M 在时刻 t 处的跳. 对于满足上述条件的鞅测度 M，令

$$\alpha(\mathrm{d}t,\mathrm{d}y)=\sum_{s>0}I_{\{M(\{s\}\times\mathrm{d}x)\neq 0\}}\varepsilon_{(s,M(\{s\}\times\mathrm{d}x))}(\mathrm{d}t,\mathrm{d}y),\tag{2.2}$$

称 $\alpha(\mathrm{d}t,\mathrm{d}y)$ 是鞅测度 M 的跳测度. 以下我们假设测度(2.2) 是整值随机测度，并且其可料对偶投影存在，记为 β. 对于 $f\in C_b(\boldsymbol{R}_+\times S)$，令 $X=\int_0^{\cdot}\int_S f(s,x)M(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)$，则 X 是 $\boldsymbol{H}$- 值鞅. 记 X 的跳测度为 $\gamma(\mathrm{d}t,\mathrm{d}x)$，$\gamma$ 的可料对偶投影为 $\lambda(\mathrm{d}t,\mathrm{d}x)$，对于 $g\in C_f(\boldsymbol{H})=\{g:g$ 是 $\boldsymbol{H}$ 上的连续函数，并且存在 $a>0$，使得当 $\|x\|>a$ 时，$g(x)=0\}$，容易计算

$$\int_0^{\cdot}\int_{\boldsymbol{H}}g(x)\gamma(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)=\int_0^{\cdot}\int_{\mathscr{M}(S)}g\left(\int_S f(s,x)y(\mathrm{d}x)\right)\alpha(\mathrm{d}s,\mathrm{d}y),$$

其中 $\mathscr{M}(S)$ 是 S 上 $\boldsymbol{H}$- 值有限测度族.

对上式两边取可料对偶投影，我们有

$$\int_0^{\cdot}\int_{\boldsymbol{H}}g(x)\lambda(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)$$

$$= \int_0^t \int_{\mathscr{M}(S)} g\left(\int_S f(s,x) y(\mathrm{d}x)\right) \beta(\mathrm{d}s,\mathrm{d}y). \tag{2.3}$$

设 M 是满足上述条件的正交鞅测度，$\bar{\upsilon} = \langle\!\langle M \rangle\!\rangle$，$\beta$ 是 M 跳测度的可料对偶投影，称 $(\bar{\upsilon}, \beta)$ 为 M 的可料特征.

7.2.7 例 （Ⅰ）设 $S = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$，则 S 上的 $\boldsymbol{H}$-值正交鞅测度 M 是由 n 个相互正交的 $\boldsymbol{H}$-值平方可积鞅 $\{M(\{a_i\}), i \leqslant n\}$ 唯一确定. 反之，设 $m^1, m^2, \cdots, m^n$ 是 n 个相互正交的 $\boldsymbol{H}$-值平方可积鞅，$\langle m^i \rangle = C^i$，$\langle\!\langle m^i \rangle\!\rangle = \int_0^\cdot Q^i(s) \mathrm{d}C_s^i$，其中 Q^i 是 $\boldsymbol{H} \hat{\otimes}_1 \boldsymbol{H}$-值可料过程，则 $M(A) = \sum_{i=1}^n m^i \delta_{a_i}(A)$ 定义了 S 上的一个正交鞅测度，并且 $\upsilon(\mathrm{d}s, \mathrm{d}x) = \sum_{i=1}^n \mathrm{d}C_s^i \delta_{a_i}(\mathrm{d}x)$，$\bar{\upsilon}([0,t] \times A) = \int_0^t \int_A Q_M(s,x) \upsilon(\mathrm{d}s, \mathrm{d}x)$，其中 $Q_M(s,x) = \sum_{i=1}^n Q^i(s) \delta_{a_i}(x)$.

（Ⅱ）设 S 是 Lusin 空间，u 是一个 S-值可料过程，m 是 $\boldsymbol{H}$-值平方可积鞅，$\langle m \rangle = C$，$\langle\!\langle m \rangle\!\rangle = \int_0^\cdot Q(s) \mathrm{d}C_s$，其中 Q 是 $\boldsymbol{H} \hat{\otimes}_1 \boldsymbol{H}$-值可料过程，令

$$M(A) = \int_0^\cdot I_A(u_s) \mathrm{d}m_s, \ \forall\ A \in \mathscr{B}(S), \tag{2.4}$$

则 M 是 S 上正交的 $\boldsymbol{H}$-值鞅测度，并且 $\langle\!\langle M \rangle\!\rangle_t = \int_0^t \int_A Q(s,x) \upsilon(\mathrm{d}s, \mathrm{d}x)$，其中 $\upsilon(\mathrm{d}s, \mathrm{d}x) = \delta_{u_s}(\mathrm{d}x) \mathrm{d}C_s$，$Q(s,x) = \delta_{u_s}(x) Q(s)$.

反之，设 M 是 S 上正交的 $\boldsymbol{H}$-值鞅测度，且 $\bar{\upsilon}(\mathrm{d}s, \mathrm{d}x) = Q(s) \delta_{u_s}(x) \delta_{u_s}(\mathrm{d}x) \mathrm{d}C_s$，$Q_s$ 是 $\boldsymbol{H} \hat{\otimes}_1 \boldsymbol{H}$-值的可料过程，则 M 具有 (2.4) 的形式，其中 $m_t = M_t(S)$.

证明　同性质 6.4.8 类似. 故略.

7.3 H-值鞅测度的随机积分

设 M 是定义在 Lusin 空间 S 上的 $\boldsymbol{H}$-值鞅测度，令

$$|||M|||^2 = \sup_{A\in\mathscr{B}(S)} E\|M_\infty(A)\|^2, \tag{3.1}$$

则 $|||\cdot|||$ 是 $\boldsymbol{H}$-值鞅测度空间上的范数.

设 M 是 S 上正交的 $\boldsymbol{H}$-值鞅测度，$\langle M\rangle = \nu$,

$$X = \sum_{i=1}^n a_i I_{F_i\times]s_i,t_i]\times A_i}, \quad F_i \in \mathscr{F}_{s_i}, \quad A_i \in \mathscr{B}(S),$$

$$a_i \in \mathscr{L}(\boldsymbol{H},\boldsymbol{G}),$$

容易证明

$$N_t(A) = \sum_{i=1}^n I_{F_i}[a_i(M_{t_i\wedge t}(A_i\cap A) - M_{s_i\wedge t}(A_i\cap A))],$$

$$\forall\, t\geqslant 0, A\in\mathscr{B}(S)$$

是一个 $\boldsymbol{G}$-值鞅测度，并且

$$|||N|||^2 \leqslant E\sum_{i=1}^n \sup_{A\in\mathscr{B}(S)} I_{F_i}\|a_i\|^2\nu(]s_i\wedge t, t_i\wedge t]\times(A_i\cap A))$$

$$= E\int_{\boldsymbol{R}_+\times S}\|X(s,x)\|^2\nu(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x).$$

这表明从 $L^2_{\mathscr{L}(\boldsymbol{H},\boldsymbol{G})}(\Omega\times\boldsymbol{R}_+\times S, \mathscr{P}\times\mathscr{B}(S), \nu\times P)$ 到 $\boldsymbol{G}$-值鞅测度的空间的映射 $X\to N$ 不是等距映射，而是压缩映射，除非 $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{G} = \boldsymbol{R}$. 从某种意义上说，这样定义的随机积分太粗糙，而且在鞅测度的空间上定义的范数(3.1)太强. 因此，我们必须寻求别的途径来定义随机积分.

设 M 是一 $\boldsymbol{H}$-值正交鞅测度，Q_M 是与 M 相联系的 $\boldsymbol{H}\hat{\otimes}_1\boldsymbol{H}$-值可料过程(在定理7.2.5(Ⅰ)意义下)，相对于 $\boldsymbol{H}\hat{\otimes}_1\boldsymbol{H}$-值过程 Q_M，我们用 $\mathscr{L}_1(\boldsymbol{H},\boldsymbol{H})$-值过程 $\overline{Q}_M$ 与之对应：

$$\overline{Q}_M h\cdot g = Q_M(h\otimes g), \quad \forall\, g,h\in\boldsymbol{H}.$$

如果记$\overline{Q}_M^{\frac{1}{2}}$为$\overline{Q}_M$的平方根，则$\overline{Q}_M^{\frac{1}{2}}$是 Hilbert-Schmidt 算子值过程. 在不引起混淆的情况下，有时我们对 Q_M 和$\overline{Q}_M$不加区分.

记 $L_v^*(\boldsymbol{H},\boldsymbol{G})$ 是取值于 $\mathscr{L}(\boldsymbol{H},\boldsymbol{G})$，并且具有下述性质的随机过程 X 的空间：

（Ⅰ）对任意的$(\omega,t,x)\in\Omega\times\boldsymbol{R}_+\times S$，$X(\omega,t,x)$ 的定义域 $\mathscr{D}(X(\omega,t,x))\subset Q_M^{\frac{1}{2}}(\omega,t,x)(\boldsymbol{H})$；

（Ⅱ）对任意的 $h\in\boldsymbol{H}$，$\boldsymbol{G}$- 值过程 $X\circ Q_M^{\frac{1}{2}}(h)$ 可料；

（Ⅲ）对任意的$(\omega,t,x)\in\Omega\times\boldsymbol{R}_+\times S$，$X(\omega,t,x)\circ Q_M^{\frac{1}{2}}(\omega,t,x)$ 是 Hilbert-Schmidt 算子，并且

$$E\int_{\boldsymbol{R}\times S}\|X(s,x)\circ Q_M^{\frac{1}{2}}(s,x)\|_2^2 v(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)<\infty.$$

我们有如下的性质：

7.3.1 性质 对任意的X、$Y\in L_v^*(\boldsymbol{H},\boldsymbol{G})$，随机过程$X\circ Q_M\circ Y^*$ 是 $\mathscr{L}_1(\boldsymbol{G},\boldsymbol{G})$- 值 $\mathscr{P}\times\mathscr{B}(S)$ 可测，并且

$$E\int_{\boldsymbol{R}_+\times S}Tr(X\circ Q_M\circ Y^*)v(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)<\infty.$$

双线性型$(X,Y)=E\int_{\boldsymbol{R}_+\times S}Tr(X\circ Q_M\circ Y^*)v(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)$ 构成了空间 $L_v^*(\boldsymbol{H},\boldsymbol{G})$ 上的内积，并且关于这个内积 $L_v^*(\boldsymbol{H},\boldsymbol{G})$ 是完备的.

证明 首先我们证明$Tr(X\circ Q_M\circ Y^*)$是$\mathscr{P}\times\mathscr{B}(S)$可测. 因为

$$\begin{aligned}Tr(X\circ Q_M\circ Y^*)&=Tr(Y\circ Q_M\circ X^*)\\&=\frac{1}{4}\{Tr[(X+Y)\circ Q_M\circ(X+Y)^*]\\&\quad-Tr[(Y-X)\circ Q_M\circ(Y-X)^*]\},\end{aligned}$$

所以，只要对任意的$X\in L_v^*(\boldsymbol{H},\boldsymbol{G})$，证明过程$Tr(X\circ Q_M\circ X^*)$是 $\mathscr{P}\times\mathscr{B}(S)$ 可测的.

设(h_n)是 $\boldsymbol{H}$ 的一个标准正交基. 因为

$$Tr(X \circ Q_M \circ X^*) = \| X \circ Q_M^{\frac{1}{2}} \|_2^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \| X \circ Q_M^{\frac{1}{2}}(h_n) \|_G^2,$$

条件(Ⅱ)表明 $Tr(X \circ Q_M \circ X^*)$ 是 $\mathscr{P} \times \mathscr{B}(S)$ 可测的. 由

$$|Tr(X \circ Q_M \circ Y^*)| \leqslant \| X \circ Q_M^{\frac{1}{2}} \|_2 \cdot \| Y \circ Q_M^{\frac{1}{2}} \|_2$$

及 Cauchy-Schwarz 不等式,我们有

$$(X,Y) = E\int_{R_+ \times S} Tr(X \circ Q_M \circ Y^*)\upsilon(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x) \tag{3.2}$$

是 $L_\upsilon^*(\boldsymbol{H},\boldsymbol{G})$ 上正的连续双线性型.

最后证明在内积(3.2)所生成的拓扑下,空间 $L_\upsilon^*(\boldsymbol{H},\boldsymbol{G})$ 是完备的. 设 $\{X_n\}_{n\geqslant 1}$ 是满足条件

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} E \int_{R_+ \times S} \| (X_n - X_m) \circ Q_M^{\frac{1}{2}} \|_2^2 \upsilon(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x) = 0 \tag{3.3}$$

的 Canchy 序列. 因此,在 $L^2_{\mathscr{L}_2(H,G)}(\Omega \times \boldsymbol{R}_+ \times S, \mathscr{P} \times \mathscr{B}(S), \upsilon \times P)$ 内, Cauchy 序列 $\{X_n \circ Q_M^{\frac{1}{2}}\}_{n\geqslant 1}$ 收敛到某一 Y. 我们可以抽出子序列 $\{X_{n_k}\}_{k\geqslant 1}$,使得

$$\lim_{k\to\infty} X_{n_k}(\omega,t,x) \circ Q_M^{\frac{1}{2}}(\omega,t,x) = Y(\omega,t,x).\ \upsilon \times P\text{-}a.s. \tag{3.4}$$

因为,由 $Q_M^{\frac{1}{2}}(\omega,t,x)f = 0$ 可推得 $Y(\omega,t,x)f = 0$,所以,存在一个从 $Q_M^{\frac{1}{2}}(\omega,t,x)(\boldsymbol{H})$ 到 $\boldsymbol{G}$ 的一个线性映射 $X(\omega,t,x)$,使得

$$Y(\omega,t,x) = X(\omega,t,x) \circ Q_M^{\frac{1}{2}}(\omega,t,x).$$

由(3.3)、(3.4)及 X 的取法知 X 满足条件(Ⅰ)～(Ⅲ),即 $X \in L_\upsilon^*(\boldsymbol{H},\boldsymbol{G})$. 证毕.

设 $\mathscr{E}(\mathscr{L}(\boldsymbol{H},\boldsymbol{G}))$ 是形如

$$h(\omega,t,x) = \sum_{i=1}^{n} u_i I_{F_i \times]s_i,t_i] \times A_i}, \quad F_i \in \mathscr{F}_{s_i}, \quad A_i \in \mathscr{B}(S),$$
$$u_i \in \mathscr{L}(\boldsymbol{H},\boldsymbol{G})$$

的 $\mathscr{L}(\boldsymbol{H},\boldsymbol{G})$- 值随机过程的空间,记 $\Lambda_\upsilon^2(\boldsymbol{H},\boldsymbol{G})$ 是 $\mathscr{E}(\mathscr{L}(\boldsymbol{H},\boldsymbol{G}))$ 在 $L_\upsilon^*(\boldsymbol{H},\boldsymbol{G})$ 中的闭包,则 $\Lambda_\upsilon^2(\boldsymbol{H},\boldsymbol{G})$ 是 $L_\upsilon^*(\boldsymbol{H},\boldsymbol{G})$ 的一个 Hilbert 子空间.

7.3.2 性质 如果随机过程 X 具有性质：

（Ⅰ）对任意的 $(\omega,t,x)\in\Omega\times\boldsymbol{R}_+\times S$，$X(\omega,t,x)\in\mathscr{L}(\boldsymbol{H},\boldsymbol{G})$，

（Ⅱ）对任意的 $h\in\boldsymbol{H}$，$X(h)$ 是 $\boldsymbol{G}$-值 $\mathscr{P}\times\mathscr{B}(S)$ 可测.

（Ⅲ）$E\int_{\boldsymbol{R}_+\times S}Tr(X\circ Q_M\circ X^*)v(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)<\infty$，

则 $X\in\Lambda_v^2(\boldsymbol{H},\boldsymbol{G})$.

证明 a）首先假设 X 是定义在 $\Omega\times\boldsymbol{R}_+\times S$ 上满足条件：$\sup\limits_{\omega,t,x}\|X(\omega,t,x)\|\leqslant K<\infty$ 的 $\mathscr{L}(\boldsymbol{H},\boldsymbol{G})$-值过程，则存在 $\mathscr{E}(\mathscr{L}(\boldsymbol{H},\boldsymbol{G}))$ 中一致有界序列 $\{X^n\}_{n\geqslant1}$，使得在 $\mathscr{L}(\boldsymbol{H},\boldsymbol{G})$ 上有 $X^n\to X$，$v\times P$-$a.s.$ 从而对于这个序列，我们有

$$\lim_{n\to\infty}E\int_{\boldsymbol{R}_+\times S}\|(X^n-X)\circ Q_M^{\frac{1}{2}}\|_2^2v(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)=0,$$

即 $X\in\Lambda_v^2(\boldsymbol{H},\boldsymbol{G})$.

b）如果过程 X 满足条件（Ⅰ）、（Ⅱ）和（Ⅲ），则对于 $\boldsymbol{H}$ 的单位球面上的稠子集 $\{h_n\}_{n\geqslant1}$，我们有

$$\|X(\omega,t,x)\|=\sup_n\|X(\omega,t,x)(h_n)\|_G,$$

从而可得 $\|X\|$ 是 $\mathscr{P}\times\mathscr{B}(S)$ 可测的. 由于

$$\lim_{n\to\infty}\|I_{\{\|X\|>n\}}X(\omega,t,x)\|=0,\quad\forall\ (\omega,t,x)\in\Omega\times\boldsymbol{R}_+\times S,$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}\|[I_{\{\|X\|\leqslant n\}}X(\omega,t,x)-X(\omega,t,x)]\circ Q_M^{\frac{1}{2}}(\omega,t,x)\|_2=0.$$

因为

$$\begin{aligned}&\|[I_{\{\|X\|\leqslant n\}}X(\omega,t,x)-X(\omega,t,x)]\circ Q_M^{\frac{1}{2}}(\omega,t,x)\|_2^2\\&=I_{\{\|X\|>n\}}\|X(\omega,t,x)\circ Q_M^{\frac{1}{2}}(\omega,t,x)\|_2^2\\&\leqslant\|X(\omega,t,x)\circ Q_M^{\frac{1}{2}}(\omega,t,x)\|_2^2,\end{aligned}$$

所以由控制收敛定理得

$$\lim_{n\to\infty} E\int_{R_+\times S} \| (I_{\{\|x\|\leqslant n\}}X - X)\circ Q_M^{\frac{1}{2}} \|_2^2 \upsilon(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x) = 0.$$

因此,我们只要就 $\|X\| \leqslant K$ 证明性质成立即可,其中 $K>0$ 是常数. 设 $\{h_n\}_{n\geqslant 1}$ 和 $\{g_n\}_{n\geqslant 1}$ 分别是 $\boldsymbol{H}$ 和 $\boldsymbol{G}$ 的标准正交基,设 Π_1^n 是 $\boldsymbol{H}$ 到 $\{h_1,\cdots,h_n\}$ 张成的 n 维空间上的正交投影,Π_2^n 是 $\boldsymbol{G}$ 到 $\{g_1,\cdots,g_n\}$ 张成的 n 维空间上的正交投影. 定义

$$X^n = \Pi_2^n \circ X \circ \Pi_1^n,$$

则对任意的 $i \geqslant 1$,我们有

$$\lim_{n\to\infty} \| (\Pi_2^n \circ X \circ \Pi_1^n - X)\circ Q_M^{\frac{1}{2}}(h_i) \|_G^2 = 0, \tag{3.5}$$

$$\| (\Pi_2^n \circ X \circ \Pi_1^n - X)\circ Q_M^{\frac{1}{2}}(h_i) \|_G^2 \leqslant 4K^2 \| Q_M^{\frac{1}{2}}(h_i) \|_H^2, \tag{3.6}$$

和

$$\sum_{i=1}^{\infty} \| Q_M^{\frac{1}{2}}(h_i) \|_H^2 = \| Q_M^{\frac{1}{2}} \|_2^2 < \infty. \tag{3.7}$$

由(3.5)、(3.6)和(3.7)可推得

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \| (\Pi_2^n \circ X \circ \Pi_1^n - X)\circ Q_M^{\frac{1}{2}}(h_i) \|_G^2 \\ &= \lim_{n\to\infty} \| (X^n - X)\circ Q_M^{\frac{1}{2}} \|_2^2 = 0,\end{aligned}$$

以及

$$\| (X^n - X)\circ Q_M^{\frac{1}{2}} \|_2^2 \leqslant 4K^2 \| X \circ Q_M^{\frac{1}{2}} \|_2^2.$$

故由假设条件及控制收敛定理得

$$\lim_{n\to\infty} E\int_{R_+\times S} \| (X^n - X)\circ Q_M^{\frac{1}{2}} \|_2^2 \upsilon(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x) = 0. \tag{3.8}$$

按照 a) 的证明知 $X^n \in \Lambda_0^2(\boldsymbol{H},\boldsymbol{G})$. 由 $\Lambda_0^2(\boldsymbol{H},\boldsymbol{G})$ 的完备性和(3.8)推得 $X \in \Lambda_0^2(\boldsymbol{H},\boldsymbol{G})$. 证毕.

有了上述的准备工作,我们就可以定义 $\boldsymbol{H}$-值鞅测度的随机积分.

7.3.3 定理 设 M 是 S 上正交鞅测度,$\langle M\rangle = \upsilon$,$\langle\langle M(A)\rangle\rangle_t$

$= \int_0^t \int_A Q_M(s,x) \upsilon(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)$，则存在唯一的从 $\Lambda_0^2(\boldsymbol{H},\boldsymbol{G})$ 到 $\boldsymbol{G}$- 值鞅测度的空间的等距线性映射，使得 $X = uI_{F\times]r,s]\times A}, r < s, F \in \mathscr{F}_r, A \in \mathscr{B}(S), u \in \mathscr{L}(\boldsymbol{H},\boldsymbol{G})$ 的象是 $\boldsymbol{G}$- 值鞅测度.

证明　我们只要验证映射

$$X = \sum_{i=1}^n u_i I_{F_i\times]r_i,s_i]\times B_i}$$

$$\to \Big\{ \sum_{i=1}^n I_{F_i}[u_i(M_{s_i\wedge t}(B_i\cap A) - M_{r_i\wedge t}(B_i\cap A))],$$

$$t \geqslant 0, A \in \mathscr{B}(S)\Big\}$$

是 $\mathscr{E}(\mathscr{L}(\boldsymbol{H},\boldsymbol{G}))$ 到 $\boldsymbol{G}$- 值鞅测度的空间的一个等距映射.

不失一般性，我们假设 $\{F_i\times]r_i,s_i]\times B_i, i = 1,2,\cdots,n\}$ 互不相交，从而我们有

$$\sup_{A\in\mathscr{B}(S)} E\Big\| \sum_{i=1}^n I_{F_i}[u_i(M_{s_i}(B_i\cap A) - M_{r_i}(B_i\cap A))]\Big\|^2$$

$$= \sup_{A\in\mathscr{B}(S)} E\Big[\sum_{i=1}^n I_{F_i} \| u_i(M_{s_i}(B_i\cap A) - M_{r_i}(B_i\cap A))\|^2\Big]$$

$$= \sup_{A\in\mathscr{B}(S)} Tr \sum_{i=1}^n \{u_i^{\otimes 2}[EI_{F_i}(M_{s_i}(B_i\cap A) - M_{r_i}(B_i\cap A))^{\otimes 2}]\}$$

$$= \sum_{i=1}^n \sup_{A\in\mathscr{B}(S)} E\Big[\int_{]r_i,s_i]\times(B_i\cap A)} I_{F_i} Tr(u_i Q_M(s,x) u_i^*)\upsilon(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)\Big]$$

$$= E\int_{\mathbb{R}_+\times S} Tr[X\circ Q_M \circ X^*]\upsilon(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x) = \| X\|_{\Lambda_0^2(\boldsymbol{H},\boldsymbol{G})}.$$

定理证毕.

在定理 7.3.3 的映射下，$\mathscr{L}(\boldsymbol{H},\boldsymbol{G})$- 值随机过程 X 的象我们称为 X 关于鞅测度 M 的随机积分，并记为 $X.M$.

下面讨论随机积分的一些性质：

7.3.4　性质　设 M 是 $\boldsymbol{H}$- 值正交鞅测度，$\langle M\rangle = \upsilon$，《$M(A)$》，

$$= \int_0^t \int_A Q_M(s,x) \upsilon(d_s, d_x).$$

(Ⅰ) 设 $X \in \Lambda_\upsilon^2(\boldsymbol{H},\boldsymbol{G})$，则随机积分 $X.M$ 是 $\boldsymbol{G}$- 值正交鞅测度，并且当 M 连续时，$X.M$ 也连续.

(Ⅱ) 如果 X、$Y \in \Lambda_\upsilon^2(\boldsymbol{H},\boldsymbol{G})$，$A$、$B \in \mathscr{B}(S)$，我们有

$$\upsilon_{X.M}(ds, dx) = Tr[X(s,x) \circ Q_M(s,x) \circ X^*(s,x)]\upsilon(ds,dx), \tag{3.9}$$

$$Q_{X\cdot M} = \frac{1}{Tr[X \circ Q_M \circ X^*]} X \circ Q_M \circ X^*, \tag{3.10}$$

$$\langle X.M(A), Y.M(B) \rangle = \int_0^t \int_{A \cap B} Tr[X \circ Q_M \circ Y^*]\upsilon(ds,dx), \tag{3.11}$$

$$\begin{aligned}\langle\langle X.M(A), Y.M(B) \rangle\rangle &= \int_0^t \int_{A \cap B} X \circ Q_M \circ Y^* \upsilon(ds,dx) \\ &= \int_0^t \int_{A \cap B} (Y \otimes X) \bar{\upsilon}(ds,dx)\end{aligned} \tag{3.12}$$

其中 $\upsilon_{X\cdot M} = \langle X.M \rangle$，$\bar{\upsilon} = \langle\langle M \rangle\rangle$.

证明　由(3.12)立即可知 $X.M$ 是 $\boldsymbol{G}$- 值正交鞅测度. 当 M 连续时，$X.M$ 连续是显然的. 因此(Ⅰ)成立.

(Ⅱ)对任意的 $F \times]r,s] \times A \in \mathscr{P} \times \mathscr{B}(S)$ 及 $X \in \Lambda_\upsilon^2(\boldsymbol{H}, \boldsymbol{G})$，由随机积分的定义及等距性，我们有

$$\begin{aligned}&E\left(I_F \left\| \int_{]r,s] \times A} X(t,x) M(dt,dx) \right\|_G^2 \right) \\ &= E\int_{F \times]r,s] \times A} Tr[X(t,x) \circ Q_M(t,x) \circ X^*(t,x)]\upsilon(dt,dx).\end{aligned}$$

这表明(3.9)成立. 由 $X.M$ 的正交性知(3.11)成立，因为(3.11)的右端为可料过程，所以由(3.9)即得(3.10)成立.

对于 $X \in \mathscr{E}(\mathscr{L}(\boldsymbol{H},\boldsymbol{G}))$，容易计算

$$E\left[I_F \left(\int_{]r,s] \times A} X(t,x) M(dt,dx) \right)^{\otimes_2} \right]$$

$$= EI_F \int_{]r,s]\times A} X(t,x)\circ Q_M(t,x)\circ X^*(t,x)\nu(\mathrm{d}t,\mathrm{d}x). \quad (3.13)$$

对于 $X\in\Lambda_\nu^2(\boldsymbol{H},\boldsymbol{G})$，则存在序列 $\{X^n\}_{n\geqslant 1}\subset\mathscr{E}(\mathscr{L}(\boldsymbol{H},\boldsymbol{G}))$，使得按 $L_\nu^2(\boldsymbol{H},\boldsymbol{G})$ 中的拓扑，X^n 收敛到 X，即

$$E\int_{\boldsymbol{R}_+\times S}\|(X^n-X)\circ Q_M^{\frac{1}{2}}\|_2^2\nu(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)\to 0,\quad n\to\infty.$$

又

$$\begin{aligned}
&E\left\|\left[\int_{\boldsymbol{R}_+\times S}[X^n(s,x)-X(s,x)]M(\mathrm{d}s,dx)\right]\right.\\
&\left.\otimes\int_{\boldsymbol{R}_+\times S}X^n(s,x)M(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)\right\|_2^2\\
\leqslant\ &E\int_{\boldsymbol{R}_+\times S}\|(X^n-X)\circ Q_M^{\frac{1}{2}}\|_2^2\nu(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)\\
&\cdot E\int_{\boldsymbol{R}_+\times S}\|X^n\circ Q_M^{\frac{1}{2}}\|_2^2\nu(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x), \qquad (3.14)\\
&\left\|E\int_{\boldsymbol{R}_+\times S}X\circ Q_M\circ X^*\nu(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)\right.\\
&\left.-E\int_{\boldsymbol{R}\times S}X^n\circ Q_M\circ(X^n)^*\nu(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)\right\|_1\\
\leqslant\ &\left\|E\int_{\boldsymbol{R}_+\times S}(X^n-X)\circ Q_M\circ(X^n-X)^*\nu(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)\right\|_1\\
&+2E\left\|\int_{\boldsymbol{R}_+\times S}X\circ Q_M\circ(X^n-X)^*\nu(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)\right\|_1\\
\leqslant\ &E\int_{\boldsymbol{R}_+\times S}\|(X^n-X)\circ Q_M^{\frac{1}{2}}\|_2^2\nu(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)\\
&+2\left[E\int_{\boldsymbol{R}_+\times S}\|(X^n-X)\circ Q_M^{\frac{1}{2}}\|_2^2\nu(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)\right]^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

$$\cdot\left[E\int_{R_+\times S}\|X\circ Q_M^{\frac{1}{2}}\|_2^2 v(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)\right]^{\frac{1}{2}}, \tag{3.15}$$

所以由(3.13)、(3.14)和(3.15)得

$$E\left[I_F\left(\int_{]r,s]\times A}X(t,x)M(\mathrm{d}t,\mathrm{d}x)\right)^{\otimes_2}\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{EI_F\left[\int_{]r,s]\times A}X^nM(\mathrm{d}t,\mathrm{d}x)\right.\right.$$

$$\left.\left.-\int_{]r,s]\times A}(X^n-X)M(\mathrm{d}t,\mathrm{d}x)\right]^{\otimes_2}\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}EI_F\int_{]r,s]\times A}X^n\circ Q_M\circ(X^n)^*v(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)$$

$$=EI_F\int_{]r,s]\times A}X\circ Q_M\circ X^*v(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x). \tag{3.16}$$

因此,有

$$\langle\!\langle X.M\rangle\!\rangle=X\circ Q_M\circ X^*v=X^{\otimes_2}\langle\!\langle M\rangle\!\rangle.$$

由此即得(3.12)成立. 证毕.

类似于推论 6.4.6 的证明,有如下性质:

7.3.5 性质 设 M 是正交的 $\boldsymbol{H}$- 值鞅测度,$v(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)$ 是 $\mathscr{B}_+\times\mathscr{B}(S)$ 上随机连续的非随机测度,则 M 是以 v 为二次变差测度的连续鞅测度的充要条件是对任意的 $X\in\Lambda_v^2(\boldsymbol{H},\boldsymbol{R})$,

$$E\left(\exp\left\{\int_0^{\cdot}\int_S(X(s,x),M(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x))_H\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{1}{2}\int_0^{\cdot}\int_S\|X(s,x)\|_H^2v(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)\right\}\right)=1.$$

下面研究关于多个鞅测度的随机积分.

设 M^i 是定义在 Lusin 空间 S 上的 $\boldsymbol{H}_i$- 值正交鞅测度,$\langle M^i\rangle=v$,$i=1,2$,并且 M^1 和 M^2 相互弱正交. 对于 $0\leqslant s<t$,$F\in\mathscr{F}_s$,$A\in\mathscr{B}(S)$,定义

$$\alpha_{ij}(F\times]s,t]\times A)$$

$$= EI_F(M_t^i(A) - M_s^i(A)) \otimes (M_t^j(A) - M_s^j(A)), i,j = 1,2.$$

则 α_{ij} 可以扩张成 $\mathscr{P} \times \mathscr{B}(S)$ 上的 $\boldsymbol{H}_i \hat{\otimes}_1 \boldsymbol{H}_j$- 值测度. 仍记此测度为 α_{ij}，和定理 7.2.5 的证明相同，我们有

7.3.6 引理 如果记 $\upsilon = \upsilon_1 + \upsilon_2$，则 υ 是 $\mathscr{P} \times \mathscr{B}(S)$ 上的测度，并且 $\alpha_{ij} \ll \upsilon \times P$. 设 $\hat{Q}_{ij}$ 是 α_{ij} 关于 $\upsilon \times P$ 的 Radon-Nikodym 导数，则 $\hat{Q}_{ij}$ 是 $\boldsymbol{H}_i \hat{\otimes}_1 \boldsymbol{H}_j$- 值可料过程.

7.3.7 推论 如果记 $Q_{ij}(i,j = 1,2)$ 是与 $\hat{Q}_{ij}$ 相对应的 $\mathscr{L}_1(\boldsymbol{H}_i,\boldsymbol{H}_j)$ 值可料过程，则下列结论成立：

(Ⅰ) $Q_{ii}(i = 1,2)$ 取值于 $\mathscr{L}_1^+(\boldsymbol{H}_i)$ 中，

(Ⅱ) $\| Q_{ij} \|_1 \leqslant 1, \quad \upsilon \times P\text{-}a.s., \ (i,j = 1,2)$.

(Ⅲ) $TrQ_{ii} \leqslant 1, \quad \upsilon \times P\text{-}a.s., \ i = 1,2$.

证明 (Ⅰ) 由 Radon-Nikodym 定理直接可得. 和定理 7.2.5 的证明相似，可得到

$$\left\| \int_A Q_{ij}(s,x)\upsilon(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x) \right\|_1 \leqslant (\upsilon \times P)(A),$$

$$\forall A \in \mathscr{P} \times \mathscr{B}(S).$$

由此即得结论(Ⅱ)和(Ⅲ)成立.

7.3.8 引理 对任意的 $h_i \in \boldsymbol{H}_i$，我们有

$$|(Q_{ij}h_i,h_j)_{H_j}|^2 \leqslant \prod_{i=1}^{2}(Q_{ii}h_i,h_i)_{H_i}, \qquad \upsilon \times P\text{-}a.s. \tag{3.17}$$

并且 $\alpha_{ij}(i \neq j)$ 关于 α_{ii} 绝对连续.

证明 设 M 和 N 是两个实值正交鞅测度，并且 M 和 N 相互弱正交，则对任意的 $x \in R$，$xM - N$ 仍是正交鞅测度. 从而有

$$\begin{aligned}
&\upsilon_{xM-N}(F \times]s,t] \times A) \\
&= EI_F[(xM_t(A) - N_t(A)) - (xM_s(A) - N_s(A))]^2 \\
&= EI_F[x(M_t(A) - M_s(A)) - (N_t(A) - N_s(A))]^2 \\
&= x^2\upsilon_M(F \times]s,t] \times A) - 2x\upsilon_{M,N}(F \times]s,t] \times A) \\
&\quad + \upsilon_N(F \times]s,t] \times A).
\end{aligned}$$

如果存在测度μ,使得$v_M \ll \mu, v_{M,N} \ll \mu$以及$v_N \ll \mu$,则$v_{xM-N} \ll \mu$. 如果记$Q_M$、$Q_{M,N}$、$Q_N$和$Q_{xM-N}$分别为$v_M$、$v_{M,N}$、$v_N$和$v_{xM-N}$关于$\mu$的密度,则我们有

$$Q_{xM-N} = x^2 Q_M - 2x Q_{M,N} + Q_N, \qquad \mu\text{-}a.s. \tag{3.18}$$

因为Q_{xM-N} μ-$a.s.$是正的,所以由(3.18)知

$$(Q_{M,N})^2 \leqslant Q_M Q_N, \qquad \mu\text{-}a.s. \tag{3.19}$$

注意到$(M^i,h_i)_{H_i}(i=1,2)$是实值鞅测度,并且(M^i,h_i)的二次变差测度为$(Q_{ii}h_i,h_i)_{H_i}v$, $\langle(M^i,h_i),(M^j,h_j)\rangle = (Q_{ij}h_i,h_j)v$,故由(3.19)可推得(3.17)成立.

往证$\alpha_{ij}(i \neq j)$关于α_{ii}绝对连续.

设$A \in \mathscr{P} \times \mathscr{B}(S)$,使得$\alpha_{ii}(A)=0$.因为对任意的$h_i \in \boldsymbol{H}_i$, $(Q_{ii}h_i,h_i)_{H_i}$是v-$a.s.$正的,所以有$I_A(Q_{ii}h_i,h_i)_{H_i}=0$, v-$a.s.$由不等式(3.17)可推得

$$(\alpha_{ij}(A)h_i,h_j) - \int I_A(Q_{ij}h_i,h_j)v(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x) = 0,$$

即$\alpha_{ij}(A)=0$.证毕.

类似于空间$L_v^*(\boldsymbol{H},\boldsymbol{G})$,$\mathscr{E}(\mathscr{L}(\boldsymbol{H},\boldsymbol{G}))$和$\Lambda_v^2(\boldsymbol{H},\boldsymbol{G})$的定义,我们可以给出$L_v^*(\boldsymbol{H}_i,\boldsymbol{G};M^i)$、$\mathscr{E}(\mathscr{L}(\boldsymbol{H}_i,\boldsymbol{G}),M^i)$和$\Lambda_v^2(\boldsymbol{H}_i,\boldsymbol{G};M^i)$的定义,并且有如下的性质:

7.3.9 定理 (Ⅰ)在$\Lambda_v^2(\boldsymbol{H}_i,\boldsymbol{G};M^i)$与$\boldsymbol{G}$-值鞅测度的空间之间存在唯一的等距映射,使得$X \in \Lambda_v^2(\boldsymbol{H}_i,\boldsymbol{G};M^i)$的象是$\boldsymbol{G}$-值鞅测度,记为$X.M^i$,称为$X$关于$M^i$的随机积分.

(Ⅱ)如果对任意的$t>0$, $I_{]0,t]}X \in \Lambda_v^2(\boldsymbol{H}_i,\boldsymbol{G};M^i)$,则$X.M^i$是$\boldsymbol{G}$-值鞅测度.

(Ⅲ)对任意的$X \in \Lambda_v^2(\boldsymbol{H}_i,\boldsymbol{G};M^i)$, $Y \in \Lambda_v^2(\boldsymbol{H}_j,\boldsymbol{G};M^j)$,我们有

$$\langle X.M^i(A),Y.M^j(B)\rangle = \int_0^\cdot\int_{A\cap B} Tr(Y \circ Q_{ij} \circ X^*)v(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x),$$

$$Q_{X.M^i,Y.M^j} = \frac{1}{Tr[X \circ Q_{ii} \circ X^* + Y \circ Q_{jj} \circ Y^*]} Y \circ Q_{ij} \circ X^*,$$

$$E\left(\int_0^{\cdot}\int_S X(t,x)M^i(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x),\int_0^{\cdot}\int_S Y(t,x)M^j(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)\right)_G$$
$$= E\int_0^{\cdot}\int_S Tr[Y(t,x)\circ Q_{ij}(t,x)\circ X^*(t,x)]\upsilon(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x),$$
$$《X.M^i(A),Y.M^j(B)》= \int_0^{\cdot}\int_{A\cap B} Y\circ Q_{ij}\circ X^*\upsilon(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x). \tag{3.20}$$

(3.20) 表明：当 $i \neq j$ 时 $X.M^i$ 与 $Y.M^j$ 相互弱正交.

证明　与单个鞅测度情形类似，故略去.

7.4　独立增量的 H- 值鞅测度

7.4.1　定义　设 M 是 $\mathscr{F}_t$- 适应的 H- 值鞅测度.

(Ⅰ) 如果对任意的 $0 \leqslant s < t$，$M_t - M_s$ 的分布与 $\mathscr{F}_s$ 独立，则称 M 为独立增量的.

(Ⅱ) 如果 $P(\{M(\{t\} \times \mathrm{d}x) \neq 0\}) > 0$，称时间 $t \geqslant 0$ 是 M 的固定不连续点.

7.4.2　定理　假设 M 是强正交的鞅测度，并且其跳测度的可料对偶投影存在，则 M 是独立增量的充要条件是其可料特征有一个非随机的版本 $(\bar{\upsilon},\beta)$.

证明　必要性　假设 M 是独立增量，由假设知 M 的跳测度是 Poisson 随机测度，从而其可料对偶投影 β 有非随机的版本. 设 $\{h_n\}_{n\geqslant 1}$ 是 H 的一个基，则对任意的 $n \geqslant 1$，$(M,h_n)_H$ 是实值独立增量的鞅测度，从而 $\langle (M,h_n)_H\rangle = q_{nn}\upsilon$ 非随机. 又对任意的 $i,j \geqslant 1$，$(M,h_i) + (M,h_j)$ 是独立增量的实值鞅测度，由

$$\langle (M,h_i) + (M,h_j)\rangle = q_{ii}\upsilon + q_{ij}\upsilon + q_{ji}\upsilon + q_{jj}\upsilon$$

及 Q 的对称性，即得 $q_{ij}\upsilon$ 非随机，从而 $\bar{\upsilon} = Q_M\upsilon = (q_{ij})\upsilon$ 非随机.

充分性　假设 $\bar{\upsilon} = 《M》$ 和 β 非随机，则 $《M^c》$ 非随机，其中 M^c 是 M 的连续鞅测度部分. 要证 M 是独立增量，我们只要证明对于

$\mathscr{B}(S)$ 中两两互不相交的集 $A_1,\cdots,A_n,X=(M(A_1),\cdots,M(A_n))$ 是 $\boldsymbol{H}^n$- 值独立增量的鞅. 因为 M 是强正交的，所以 $M(A_i)$ 与 $M(A_j)(i\neq j)$ 没有相同的跳跃点. 记 λ 和 λ_i 分别为 X 和 $M(A_i)$ 的跳测度的可料对偶投影，则有 $\lambda=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i$ 和《X^c》$=(a_{ij})_{i,j\leqslant n}$ 非随机，其中 $a_{ii}=$《$M^c(A_i)$》$(i\leqslant n)$，$a_{ij}=0(i\neq j)$. 故由定理 1.4.18 知 X 是 $\boldsymbol{H}^n$- 值独立增量的鞅. 证毕.

7.4.3 定理 设 M 是连续的正交鞅测度，则 M 独立增量的充要条件是《M》非随机.

证明的思想方法与定理 7.4.2 相同，故略去证明.

注 在这个定理中，我们并不要求 $M(\{t\}\times \mathrm{d}x)=M_t(\mathrm{d}x)-M_{t-}(\mathrm{d}x)$ 是 $\boldsymbol{H}$- 值随机测度.

7.4.4 推论 设 $S=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$，$m^1,\cdots,m^n$ 是相互正交的 $\boldsymbol{H}$- 值平方可积鞅. 令 $M_t(A)=\sum_{i=1}^{n}m_t^i\delta_{a_i}(A)$，则 M 是独立增量鞅测度的充要条件为 $(m^1,\cdots,m^n)$ 是 $\boldsymbol{H}^n$- 值独立增量的鞅.

7.5 $\boldsymbol{H}$- 值鞅测度的表示定理

本节要研究单个鞅测度的积分表示定理以及两个相互弱正交鞅测度的相互表示定理.

7.5.1 引理 设 $\mathscr{U}_H$ 是 $\boldsymbol{H}$ 到自身所有酉算子的集合，并在其上赋一致模拓扑. $\{h_n\}_{n\geqslant 1}$ 是 $\boldsymbol{H}$ 的一个标准正交基，则存在从 $\mathscr{L}_1^s(\boldsymbol{H})$（$\boldsymbol{H}$ 上对称核算子集）到 $\mathscr{U}_H$ 的可测映射 F，使得对任意的 $\sigma\in\mathscr{L}_1^s(\boldsymbol{H})$，在 $\{h_n\}_{n\geqslant 1}$ 下 $F(\sigma)\circ\sigma\circ F^*(\sigma)$ 是对角矩阵.

证明　为了方便，只就对称正的紧算子情形给出证明. 设 $\mathscr{C}(\boldsymbol{H})$ 为 $\boldsymbol{H}$ 上对称正的紧算子集. 令

$$\lambda_1(u)=\sup_{\|x\|\leqslant 1}(u(x),x),\qquad u\in\mathscr{C}(\boldsymbol{H}),$$

则 λ_1 是 $\mathscr{C}(\boldsymbol{H})$ 上的有界线性泛函，并且 $\lambda_1(u)$ 是 u 的最大特征值. 如果 $\lambda_1(u)\neq 0$，由 Riesz 定理知 u 相对于 $\lambda_1(u)$ 的特征子空间是有限维的. 定义

$$B_1=\{(u,x):u\in\mathscr{C}(\boldsymbol{H}),\ \|x\|=1,\ \text{并且}\ \lambda_1(u)\neq 0,u(x)=\lambda_1(u)x\},$$

则 B_1 在 $\mathscr{C}(\boldsymbol{H})\times\boldsymbol{H}$ 中有界，并且对使得 $\lambda_1(u)\neq 0$ 的 u 截口是 $\boldsymbol{H}$ 的紧子集. 因此存在定义在 $\lambda_1(u)\neq 0$ 的 u 所组成的集到 $\boldsymbol{H}$ 的有界线性映射 $e_1(u)$，使得对 $\lambda_1(u)\neq 0$ 的 u，$(u,e_1(u))\in B_1$. 如果 $\lambda_1(u)=0$，则定义 $e_1(u)=0$. 因此 e_1 是 $\mathscr{C}(\boldsymbol{H})$ 上的有界线性算子.

令

$$\lambda_2(u)=\sup_{\|x\|\leqslant 1,x\perp e_1(u)}(u(x),x),\qquad u\in\mathscr{C}(\boldsymbol{H}),$$

则 $\lambda_2(u)$ 是 $\mathscr{C}(\boldsymbol{H})$ 上有界线性泛函. 定义

$$B_2=\{(u,x):u\in\mathscr{C}(\boldsymbol{H}),\|x\|=1,\text{并且}\ x\perp e_1(u),\lambda_2(u)\neq 0,u(x)=\lambda_2(u)x\},$$

按照上述同样的方法，我们可以构造 B_2 的截口 $e_2(u)$，并对 $\lambda_2(u)=0$，延拓 $(e_2(u)=0$.

这样进行下去，我们便得到序列 $\{\lambda_n(u)\}_{n\geqslant 1}$ 和 $\{e_n(u)\}_{n\geqslant 1}$，由 Riesz 定理知 $\lambda_n(u)$ 单调下降趋于 0，并且

$$u(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n(u)(x,e_n(u))e_n(u).$$

下面我们分三种情况加以讨论.

1° 首先考虑由 $\{e_n(u)\}_{n\geqslant 1}$ 构成 $\boldsymbol{H}$ 基的算子 u 所组成的集合 $\mathscr{C}_1$，并假设此集在 $\mathscr{C}(\boldsymbol{H})$ 中有界. 假设 $\boldsymbol{H}$ 是无限维的，则我们有

$$x=\sum_{n=1}^{\infty}(x,e_n(u))e_n(u),\quad\forall\,x\in\boldsymbol{H},\quad u\in\mathscr{C}_1.$$

在这种情况下，定义

$$F(u)e_n(u)=h_n,\ n\geqslant 1,$$

则 $F(u)$ 是酉算子，并且

$$F(u)\circ u\circ F^*(u)h_n=\lambda_n(u)h_n,\quad n\geqslant 1,$$

即在$\{h_n\}_{n\geqslant 1}$下，$F(u)\circ u\circ F^*(u)$是对角形矩阵.

2° 考虑满足下述条件的u所组成的有界集$\mathscr{C}_2$. 对$u\in\mathscr{C}_2$，存在正整数$N(u)$，使得当$n>N(u)$时，$e_n(u)=0$，即当$n\geqslant N(u)$时，$\lambda_n(u)=0$. 令

$$p_n(x)=x-\sum_i(x,e_i(u))e_i(u),\quad x\in\boldsymbol{H},\quad u\in\mathscr{C}_2,$$

则当$n\leqslant N(u)$时，我们有

$$e_n(u)-p_n(e_n(u))=e_n(u).$$

把$\{h_n-p(h_n)\}_{n\geqslant 1}$中与$\{e_n(u)\}_{n\leqslant N(u)}$相关的元素去掉，然后对$\{e_1(u),\cdots,e_{N(u)}(u),h_1-p(h_1),\cdots,h_n-p(h_n),\cdots\}$实行 Herimite 正交化，可得$\boldsymbol{H}$的一个正交基，设为$\{e_n(u)\}_{n\geqslant 1}$. 由假设我们有

$$u(e_n(u))=\lambda_n(u)e_n(u),\qquad n\leqslant N(u)$$

$$u(e_n(u))=0,\qquad n>N(u).$$

在这种情况下，同 1° 一样定义$F(u)$，可得$F(u)\circ u\circ F^*(u)$在$\{h_n\}_{n\geqslant 1}$下是对角形矩阵.

3° 考虑所有使得$e_n(u)\neq 0, n\geqslant 1$，但$\{e_n(u)\}_{n\geqslant 1}$不构成$\boldsymbol{H}$的基. 把$\{h_n\}_{n\geqslant 1}$和$\{e_n(u)\}_{n\geqslant 1}$交错排列，然后同 2° 一样进行正交化，我们即可得到在这种情况下，引理也成立. 证毕.

7.5.2 定理 设$\{h_n\}_{n\geqslant 1}$是$\boldsymbol{H}$的一组标准正交基，M是$\boldsymbol{H}$-值正交鞅测度，$\langle M\rangle=\upsilon$，$\langle\langle M\rangle\rangle=Q_M\upsilon$. 如果对任意的$t>0$，$E\upsilon([0,t]\times S)<\infty$，则存在一个$\boldsymbol{H}$-值正交鞅测度$N$及$\mathscr{L}(\boldsymbol{H})$-值随机过程$\psi$，使得$\psi I_{[0,t]}\in\Lambda_0^2(\boldsymbol{H},\boldsymbol{H})$，$M=\psi.N$，并且$\langle\langle N\rangle\rangle=Q_N.\upsilon$，其中$Q_N$在基$\{h_n\}_{n\geqslant 1}$下是对角形矩阵.

证明 设F是引理 7.5.1 中的可测映射. 因为Q_M是$\mathscr{L}_1^+(\boldsymbol{H})$-值可料过程，所以我们可以定义$\mathscr{U}_H$-值可料过程$X=F(Q_M)$. 由定义可知：对任意的$(\omega,s,x)\in\Omega\times\boldsymbol{R}_+\times S$，$F(Q_M(\omega,s,x))\circ Q_M(\omega,s,x)\circ F^*(Q_M(\omega,s,x))$在基$\{h_n\}_{n\geqslant 1}$下是对角形，并且$Tr(X$

$\circ Q_M \circ X^*) = TrQ_M$. 因此，我们有

$$E\int_0^t\int_S Tr(X \circ Q_M \circ X^*)\upsilon(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)$$

$$\leqslant E\upsilon([0,t] \times S) < \infty, \quad \forall\, t > 0. \tag{5.1}$$

由性质 7.3.2 可知 $XI_{]\!]0,t]\!]} \in \Lambda_\upsilon^2(\boldsymbol{H},\boldsymbol{H})$. 令 $N = X.M$，则由(3.10)可知 $Q_N = X \circ Q_M \circ X^*$ 在 $\{h_n\}_{n\geqslant 1}$ 下是对角形. 这表明 (N,h_i) 与 $(N,h_j)(i \neq j)$ 正交. 因为 $Q_M = X^* \circ Q_N \circ X$，由(3.9)可得

$$\langle N\rangle = Tr[X \circ Q_M \circ X^*]\upsilon$$
$$= Tr[X \circ X^* \circ Q_N \circ X \circ X^*]\upsilon = \upsilon.$$

(5.1) 表明 $X^* I_{]\!]0,t]\!]} \in \Lambda_\upsilon^2(\boldsymbol{H},\boldsymbol{H}), \forall\, t > 0$. 所以，如果我们令 $\psi = X^*$，则 ψ 就满足定理中的要求. 证毕.

7.5.3 定理 设 M^1 和 M^2 分别为定义在 Lusin 空间 S 上的 $\boldsymbol{H}$- 值鞅测度和 $\boldsymbol{G}$- 值鞅测度，$\langle M^i\rangle = \upsilon_i, i = 1,2$，并且对任意的 $t > 0, E\upsilon_i([0,t] \times S) < \infty (i = 1,2)$. 如果对任意的 $g \in \boldsymbol{G}$，实值鞅测度 (M^2,g) 属于由鞅测度族 $\{(M^1,h),h \in \boldsymbol{H}\}$ 生成的线性拓扑空间，则存在随机过程 ψ，使得对任意的 $t > 0, \psi I_{]\!]0,t]\!]} \in \Lambda_{\upsilon_1}^2(\boldsymbol{H},\boldsymbol{G})$，并且 $M^2 = \psi. M^1$.

证明　设 $\{h_n\}_{n\geqslant 1}$ 是 $\boldsymbol{H}$ 的一个标准正交基，F 和引理 7.5.1 中相同. 定义 $\mathscr{U}_H$- 值可料过程 $X = F(Q_{M^1})$，并且令 $N = X. M^1$，和定理 7.5.2 的证明相同，我们知道 N 是 $\boldsymbol{H}$- 值正交鞅测度，$X^* I_{]\!]0,t]\!]} \in \Lambda_{\upsilon_1}^2(\boldsymbol{H},\boldsymbol{H}), \forall\, t > 0$，并且 $M^1 = X^*. N$. 因为 $\{(M^1,h),h \in \boldsymbol{H}\}$ 和 $\{(N,h),h \in \boldsymbol{H}\}$ 张成相同的线性拓扑空间，对任意 $g \in \boldsymbol{G}$，由假设在 $\{\varphi. N^n: \varphi \in \Lambda_{\upsilon^n}^2(\boldsymbol{R},\boldsymbol{R})\}$ 张成的线性拓扑空间上，(M^2,g) 有正交分解，其中 $N^n = (N,h_n), \upsilon^n = \langle N^n\rangle$. 设 $\{g_n\}_{n\geqslant 1}$ 是 $\boldsymbol{G}$ 的一个标准正交基，则由假设我们有

$$(M^2,g_n) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_{n,k}. N^k, \quad \varphi_{n_k} \in \Lambda_{\upsilon^k}^2(\boldsymbol{R},\boldsymbol{R}), n,k \geqslant 1, \tag{5.2}$$

并且对任意的 $t > 0$，

$$\infty > Ev_2([0,t]\times S) = E\| M_t^2(S)\|^2$$
$$= E\sum_{n=1}^{\infty}(M_t^2(S),g_n)^2$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}E\Big[\int_0^t\int_S \varphi_{nk}(s,x)N^k(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)\Big]^2$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}E\int_0^t\int_S \varphi_{nk}^2(s,x)Q_N^{kk}v_1(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x). \qquad (5.3)$$

如果令

$$\overline{\varphi}(\omega,t,x)(h) = \sum_{n=1}^{\infty}\Big(\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_{nk}(\omega,t,x)(h,h_k)\Big)g_n,$$

则$\overline{\varphi}(\omega,t,x)$的定义域

$$\mathscr{D}\,\overline{\varphi}(\omega,t,x)\subset\Big\{h:\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}|\varphi_{nk}|^2(h,h_k)^2<\infty\Big\},$$

并且(5.3)可推得

$$\mathscr{D}\,\overline{\varphi}\subset\Big\{\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}(Q_N^{kk})^{\frac{1}{2}}(h,h_k)h_k\Big\}=Q_N^{\frac{1}{2}}(\boldsymbol{H}),\quad P\text{-}a.s.$$

因为 $\|\overline{\varphi}\circ Q_N^{\frac{1}{2}}\|_2^2=\sum_{k,n}\varphi_{nk}^2Q_N^{kk}$，(5.3)表明$\overline{\varphi}I_{]0,t]}\in\Lambda_{v_N}^2(\boldsymbol{H},G)$，$\forall\, t>0$. 如果我们令 $\psi=\overline{\varphi}\circ X$，则 $\psi I_{]0,t]}\in\Lambda_{v_1}^2(\boldsymbol{H},\boldsymbol{G})$. (5.2)可推得

$$M^2=\sum_{n=1}^{\infty}(M^2,g_n)g_n=\sum_{n=1}^{\infty}\Big[\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_{nk}.(N,h_k)\Big]g_n$$
$$=\overline{\varphi}.N=\psi.M^1.$$

定理证毕.

7.5.4 引理 设 $A\in\mathscr{L}_1^+(\boldsymbol{H}_2)$，$B\in\mathscr{L}_1(\boldsymbol{H}_2,\boldsymbol{H}_1)$，并且 $\|A\|_1\leqslant 1$，$\|B\|_1\leqslant 1$. 如果定义算子

$$A(u)=\Big(\int_0^u\exp\{(s-u)A^2\}\mathrm{d}s\Big)A,\quad u\geqslant 0,$$

则对 $u\geqslant 0$，$BA(u)$ 和 $BA(u)A^{\frac{1}{2}}$ 均为 Hilbert-Schmidt 算子，并且

$$\|BA(u)A^{\frac{1}{2}}\|_2^2\leqslant u(1-e^{-u})\|B\|_1,\quad \forall\, u\geqslant 0.$$

证明　因为

$$\| B \|_2 \leqslant \| B \|_1 \leqslant 1, \tag{5.4}$$

所以 B 是 Hilbert-Schmidt 算子. 由 $A(u)$ 和 A 的有界性可知 $BA(u)$ 和 $BA(u)A^{\frac{1}{2}}$ 均为 Hilbert-Schmidt 算子.

设 $\{h_n\}_{n\geqslant 1}$ 是 A 的一个正交特征向量, $\{\lambda_n\}_{n\geqslant 1}$ 是 A 相应的正特征值序列, 即 $Ah_n = \lambda_n h_n, n \geqslant 1$ 我们有

$$Ah = \sum_{n=1}^{\infty} (h, h_n)\lambda_n h_n, \quad \forall\, h \in \boldsymbol{H}_2. \tag{5.5}$$

对任意的 $n \geqslant 1$, 我们有

$$\begin{aligned}\| BA(u)A^{\frac{1}{2}}h_n \|^2 &= \left\| B\left(\int_0^u exp\{(s-u)A^2\}ds\right) \lambda_n^{\frac{3}{2}}h_n \right\|^2 \\ &= \lambda_n^3 \left\| B\left(\int_0^u e^{(s-u)\lambda_n^2}ds\right) h_n \right\|^2 \\ &= \frac{1}{\lambda_n}[1 - e^{-u\lambda_n^2}]^2 \| Bh_n \|^2. \end{aligned} \tag{5.6}$$

另一方面, 我们又有

$$\frac{1}{\lambda_n}(1 - e^{-u\lambda_n^2}) = \lambda_n u \frac{1 - e^{-u\lambda_n^2}}{\lambda_n^2 u} \leqslant \lambda_n u. \tag{5.7}$$

因为 $\| A \|_1 \leqslant 1$, 所以对任意的 $n \geqslant 1, 0 < \lambda_n \leqslant 1$, 从而由 (5.6) 和 (5.7) 可得

$$\| BA(u)A^{\frac{1}{2}}h_n \|^2 \leqslant u(1 - e^{-u}) \| Bh_n \|^2. \tag{5.8}$$

故由 (5.4) 我们有

$$\| BA(u)A^{\frac{1}{2}} \|_2^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \| BA(u)A^{\frac{1}{2}}h_n \|^2$$

$$\leqslant u(1 - e^{-u}) \sum_{n=1}^{\infty} \| Bh_n \|^2$$

$$\leqslant u(1 - e^{-u}) \| B \|_2^2 \leqslant u(1 - e^{-u}) \| B \|_1.$$

证毕.

7.5.5　引理　设 A 和 B 满足引理 7.5.4 中的条件. 如果记

I_{H_2} 为 H_2 上的恒等算子，则对任意的 $u \geqslant 0, BA(u)(2I_{H_2} - AA(u))B^* \in \mathscr{L}_1(H_1)$，并且

$$Tr[BA(u)(2I_{H_2} - AA(u))B^*] > 0. \tag{5.9}$$

假设 $\{h_n\}_{n\geqslant 1}$ 是 H_2 的一个正交系，$\{\lambda_n\}_{n\geqslant 1}$ 是单调下降的正数列. 如果 $Ah_n = \lambda_n h_n$，则

$$\lim_{u\to\infty} Tr[BA(u)(2I_{H_2} - AA(u))B^*] = \sum_{n=1}^{\infty} \| BA^+ A^{\frac{1}{2}} h_n \|^2. \tag{5.10}$$

这里的极限是在 $\overline{R}_+ = [0,\infty]$ 中取的.

证明　因为对任意的 $n \geqslant 1$，

$$A(u)h_n = \frac{1}{\lambda_n}(1 - e^{-u\lambda_n^2})h_n, \tag{5.11}$$

所以

$$[2I_{H_2} - AA(u)]h_n = (1 + e^{-u\lambda_n^2})h_n, \quad \forall\, n \geqslant 1. \tag{5.12}$$

假设 $\{g_n\}_{n\geqslant 1}$ 是 H_1 的标准正交基，则对任意的 $p \geqslant 1$，我们有

$$B^* g_p = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^p h_n + u_p, \tag{5.13}$$

其中 $\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n^p)^2 < \infty, u_p \in \ker A$. 显然 u_p 与 $h_n (n \geqslant 1)$ 正交. 因此，我们有

$$[2I_{H_2} - AA(u)]B^* g_p = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^p (1 + e^{-u\lambda_n^2})h_n + 2u_p$$

和

$$A(u)[2I_{H_2} - AA(u)]B^* g_p = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n^p}{\lambda_n}(1 - e^{-2u\lambda_n^2})h_n. \tag{5.14}$$

所以，对任意的 $p \geqslant 1$，由(5.13)和(5.14)可推得

$$(A(u)[2I_{H_2} - AA(u)]B^* g_p, B^* g_p) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\alpha_n^p)^2}{\lambda_n}(1 - e^{-2u\lambda_n^2}).$$

由此可推得

$$TrBA(u)[2I_{H_2} - AA(u)]B^* = \sum_{p=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\alpha_n^p)^2}{\lambda_n}(1 - e^{-2u\lambda_n^2}), \tag{5.15}$$

即(5.9) 成立.

另一方面,对任意的 $n \geqslant 1$,

$$\| BA^+ A^{\frac{1}{2}}h_n \|^2 = \frac{1}{\lambda_n}\| Bh_n \|^2. \tag{5.16}$$

然而,(5.13) 可推得

$$\| Bh_n \|^2 = \sum_{p=1}^{\infty}(Bh_n, g_p)^2 = \sum_{p=1}^{\infty}(h_n, B^* g_p)^2 = \sum_{p=1}^{\infty}(\alpha_n^p)^2,$$

由(5.16),我们有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\| BA^+ A^{\frac{1}{2}}h_n \|^2 = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{(\alpha_n^p)^2}{\lambda_n} = \sum_{p=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\alpha_n^p)^2}{\lambda_n}. \tag{5.17}$$

(5.15) 和(5.17) 立即可推得(5.10) 成立. 证毕.

7.5.6 注 在引理 7.5.5 中,如果假设 A 和 B 满足条件

$$\sum_{n=1}^{\infty}\| BA^+ A^{\frac{1}{2}}h_n \|^2 < \infty,$$

则 BA^+ 可以延拓到 $A^{\frac{1}{2}}$ 的值域上,扩张后的算子仍计为 BA^+. 因此 $BA^+ A^{\frac{1}{2}}$ 是 Hilbert-Schmidt 算子,并且

$$\| BA^+ A^{\frac{1}{2}} \|_2^2 = \sum_{n=1}^{\infty}\| BA^+ A^{\frac{1}{2}}h_n \|^2.$$

事实上,把 $\{h_n\}_{n\geqslant 1}$ 扩充成 $\boldsymbol{H}_2$ 的一组基 $\{e_n\}_{n\geqslant 1}$,并记 $\{h'_n\}_{n\geqslant 1}$ 为 $\ker(A)$ 的正交系,则我们有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\| BA^+ A^{\frac{1}{2}}e_n \|^2 = \sum_{n=1}^{\infty}\| BA^+ A^{\frac{1}{2}}h_n \|^2 < +\infty.$$

所以 $BA^+ A^{\frac{1}{2}}$ 可以延拓成为 $\boldsymbol{H}_2$ 到 $\boldsymbol{H}_1$ 的 Hilbert-Schmidt 算子. 从

而 BA^+ 可以延拓到 $A^{\frac{1}{2}}$ 的值域上.

7.5.7 引理 假设 A、B 满足引理 7.5.4 中的条件. 如果 A 和 B 使得 $BA^+A^{\frac{1}{2}}$ 是 Hilbert-Schmidt 算子，则下列结论成立：

(Ⅰ) $\| B[A(u)-A^+]A^{\frac{1}{2}} \|_2 \leqslant \| BA^+A^{\frac{1}{2}} \|_2, \forall u \in \boldsymbol{R}_+$;

(Ⅱ) $\lim\limits_{u\to+\infty} \| B[A(u)-A^+]A^{\frac{1}{2}} \|_2 = 0$.

证明 注意到对任意的 $u \geqslant 0$，$B[A(u)-A^+]A^{\frac{1}{2}}$ 是 Hilbert-Schmidt 算子，并且

$$\| B[A(u)-A^+]A^{\frac{1}{2}} \|_2^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \| B[A(u)-A^+]A^{\frac{1}{2}}h_n \|^2.$$

由(5.11)，我们有

$$[A(u)-A^+]A^{\frac{1}{2}}h_n = -\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}e^{-u\lambda_n^2}h_n. \tag{5.18}$$

因此，

$$\| B[A(u)-A^+]A^{\frac{1}{2}} \|_2^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n}e^{-2u\lambda_n^2} \| Bh_n \|^2. \tag{5.19}$$

对任意的 $u \geqslant 0$，(5.16) 可推得

$$\frac{1}{\lambda_n}e^{-2u\lambda_n^2} \| Bh_n \|^2 \leqslant \frac{1}{\lambda_n} \| Bh_n \|^2 = \| BA^+A^{\frac{1}{2}}h_n \|^2. \tag{5.20}$$

(5.19) 和(5.20) 可推得

$$\| B[A(u)-A^+]A^{\frac{1}{2}} \|_2^2 \leqslant \| BA^+A^{\frac{1}{2}} \|_2^2.$$

由 (5.20) 可知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n}e^{-2u\lambda_n^2} \| Bh_n \|^2$ 关于 u 是一致收敛，从而由 (5.19)

$$\lim_{u\to\infty} \| B[A(u)-A^+]A^{\frac{1}{2}} \|_2^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda_n}e^{-2u\lambda_n^2} \| Bh_n \|^2 = 0.$$

证毕.

下面的定理是我们这一节的主要结果，它研究了两个相互弱

正交的 Hilbert 空间值鞅测度之间的关系.

7.5.8 定理 设 M^i 是定义在 Lusin 空间 S 上的 $\boldsymbol{H}_i$- 值鞅测度,$\langle M^i\rangle = \upsilon_i, i = 1,2$. 记 $\upsilon = \upsilon_1 + \upsilon_2$,如果 M^1 和 M^2 弱正交,并且对任意的 $t > 0, E\upsilon([0,t]\times S) < \infty$,则存在唯一的可料过程 φ,使得对任意的 $t > 0, \varphi I_{]0,t]} \in \Lambda_\upsilon^2(\boldsymbol{H}_2,\boldsymbol{H}_1;M^2), M^3 = M^1 - \varphi. M^2$ 是 $\boldsymbol{H}_1$- 值正交鞅测度,并且 M^3 与 M^2 正交.

进一步地,对 $\upsilon\times P$-a.s. $(\omega,t,x)\in\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{R}_+\times S$, $\varphi(\omega,t,x)$ 是 $Q_{21}(\omega,t,x)\circ Q_{22}^{+\frac{1}{2}}(\omega,t,x)$ 在 $Q_{22}^{\frac{1}{2}}(\omega,t,x)$ 的值域上的延拓.

证明 a) 对任意的 $(\omega,t,x)\in\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{R}_+\times S$,令

$$B(u)(\omega,t,x) = \left(\int_0^u \exp\{(s-u)Q_{22}^2(\omega,t,x)\}\mathrm{d}s\right)Q_{22}(\omega,t,x),\quad \forall\, u > 0,$$

$Y(u) = Q_{21}\circ B(u)$. 则由引理 7.5.4 知 $Y(u)$ 是 $\mathscr{L}_1(\boldsymbol{H}_2,\boldsymbol{H}_1)$- 值过程. 由于 $\mathscr{L}_1(\boldsymbol{H}_2)$ 与 $\boldsymbol{H}_2\hat{\otimes}_1\boldsymbol{H}_2$ 同构,$\mathscr{L}_1(\boldsymbol{H}_2,\boldsymbol{H}_1)$ 与 $\boldsymbol{H}_2\hat{\otimes}_1\boldsymbol{H}_1$ 同构,所以 $\mathscr{L}_1(\boldsymbol{H}_2)$ 和 $\mathscr{L}_1(\boldsymbol{H}_2,\boldsymbol{H}_1)$ 是可分的距离空间. 又 $\mathscr{L}_1^+(\boldsymbol{H}_2)$ 是 $\mathscr{L}_1(\boldsymbol{H}_2)$ 的子空间,$Y(u)$ 是 $\mathscr{L}_1^+(\boldsymbol{H}_2)\times\mathscr{L}_1(\boldsymbol{H}_2,\boldsymbol{H}_1)$ 到 $\mathscr{L}_1(\boldsymbol{H}_2,\boldsymbol{H}_1)$ 的可测映射,由 Q_{21} 和 Q_{22} 是 $\mathscr{P}\times\mathscr{B}(S)$ 可测可知 $Y(u)$ 也是 $\mathscr{P}\times\mathscr{B}(S)$ 可测.

对任意的 $t > 0$,由引理 7.5.4,我们有

$$E\int_0^t\int_S \| Y(u)(s,x)Q_{22}^{\frac{1}{2}}(s,x)\|_2^2\upsilon(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)$$
$$\leqslant u(1-e^{-u})E\int_0^t\int_S \| Q_{21}(s,x)\|_1\upsilon(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)$$
$$\leqslant u(1-e^{-u})E\upsilon([0,t]\times S).$$

由性质 7.3.2 及定理 7.3.9 可知 $Y(u)I_{]0,t]}\in\Lambda_\upsilon^2(\boldsymbol{H}_2,\boldsymbol{H}_1,M^2)$.

b) 对任意的 $t>0, u>0$,由 a) 的证明知积分 $\int_0^t\int_S Y(u)(s,x)\cdot M^2(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)$ 存在. 对任意的 $A\in\mathscr{B}(S)$,定理 7.3.9 可推得

$$
\begin{aligned}
& E\left\| M_t^1(A)-\int_0^t\int_A Y(u)(s,x)M^2(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)\right\|_{H_1}^2 \\
&= E\| M_t^1(A)\|_{H_1}^2-2E\Big(M_t^1(A),\int_0^t\int_A Y(u)(s,x) \\
&\quad \cdot M^2(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)\Big)_{H_1}+E\left\|\int_0^t\int_A Y(u)(s,x)M^2(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)\right\|_{H_1}^2 \\
&= E\| M_t^1(A)\|_{H_1}^2 \\
&\quad -2E\int_0^t\int_A Tr[Y(u)(s,x)Q_{12}(s,x)]\upsilon(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x) \\
&\quad +E\int_0^t\int_A Tr[Y(u)(s,x)Q_{22}(s,x)Y^*(u)(s,x)]\upsilon(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x).
\end{aligned}
$$

因此

$$
\begin{aligned}
\infty &> E\| M_t^1(A)\|_{H_1}^2 \\
&\geqslant E\int_0^t\int_A Tr[Y(u)(2Q_{12}-Q_{22}Y^*(u))]\upsilon(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x) \\
&= E\int_0^t\int_A Tr[Y(u)(2Q_{21}^*-Q_{22}Y^*(u))]\upsilon(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x) \\
&= E\int_0^t\int_A Tr[Q_{21}B(u)(2Q_{21}^*-Q_{22}B^*(u)Q_{21}^*)]\upsilon(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x) \\
&= E\int_0^t\int_A Tr[Q_{21}B(u)(2I_{H_2}-Q_{22}B(u))Q_{21}^*]\upsilon(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x).
\end{aligned}
$$

由 Faton 引理和引理 7.5.5,我们有

$$
\begin{aligned}
& E\int_0^t\int_A \lim_{u\to\infty} Tr[Q_{21}B(u)(2I_{H_2}-Q_{22}B(u))Q_{21}^*]\upsilon(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x) \\
& \leqslant E\| M_t^2(A)\|_{H_1}^2<\infty. \qquad (5.21)
\end{aligned}
$$

从而可得

$$
\lim_{u\to\infty} Tr[Q_{21}B(u)(2I_{H_2}-Q_{22}B(u))Q_{21}^*]\upsilon(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)<\infty, \qquad \upsilon\times P\text{-}a.s.
$$

由注 7.5.6 可知:对于 $\upsilon\times P$-$a.s.$ $(\omega,t,x)\in\Omega\times\mathbf{R}_+\times S$, $Q_{21}(\omega,t,x)Q_{22}^{+}(\omega,t,x)$ 可以延拓到 $Q_{22}^{\frac{1}{2}}(\omega,t,x)$ 的值域上,记此延拓为 $\varphi(\omega,t,x)$. 则 $\varphi(\omega,t,x)Q_{22}^{\frac{1}{2}}(\omega,t,x)$ 是 Hilbert-Schmidt 算子,并且由引理 7.5.5,我们有

$$\lim_{n\to\infty} Tr[Q_{21}B(u)(2I_{H_2} - Q_{22}B(u))Q_{21}^*]$$
$$= \| \varphi Q_{22}^{\frac{1}{2}} \|_2^2, \qquad \upsilon \times P\text{-}a.s. \tag{5.22}$$
即在 $\upsilon \times P$ 等价意义下，$\varphi Q_{22}^{\frac{1}{2}}$ 是 $\mathscr{P} \times \mathscr{B}(S)$ 可测. (5.21) 和 (5.22) 可推得
$$E\int_0^t\int_A \| \varphi Q_{22}^{\frac{1}{2}} \|_2^2 \upsilon(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x) < \infty, \quad \forall\, t > 0, \quad A \in \mathscr{B}(S),$$
这表明 $\varphi I_{]0,t]} \in \Lambda_\upsilon^2(\boldsymbol{H}_2,\boldsymbol{H}_1;M^2)$.

c) 因为 $Q_{21}Q_{22}^{+}Q_{22}^{\frac{1}{2}}$ $\upsilon \times P\text{-}a.s.$ 为 Hilbert-Schmidt 算子，引理 7.5.7 可得
$$\| Q_{21}(B(n) - Q_{22}^{+})Q_{22}^{\frac{1}{2}} \|_2^2 \leqslant \| Q_{21}Q_{22}^{+}Q_{22}^{\frac{1}{2}} \|_2^2, \forall\, n \geqslant 1,$$
$$\lim_{n\to\infty} \| Q_{21}(B(n) - Q_{22}^{+})Q_{22}^{\frac{1}{2}} \|_2 = 0.$$
因此由 Lebesgue 收敛定理及 b) 的证明知 $Q_{21}Q_{22}^{+}I_{]0,t]}$ 是序列 $\{Q_{21}B(u)I_{]0,t]}\}_{n\geqslant 1}$ 在 $L_\upsilon^*(\boldsymbol{H}_2,\boldsymbol{H}_1;M^2)$ 中的极限. 由于 $\{Q_{21}B(n)I_{]0,t]}\}_{n\geqslant 1} \subset \Lambda_\upsilon^2(\boldsymbol{H}_2,\boldsymbol{H}_1;M^2)$，所以 $Q_{21}Q_{22}^{+}I_{]0,t]} \in \Lambda_\upsilon^2(\boldsymbol{H}_2, \boldsymbol{H}_1;M^2)$.

d) φ 就是我们所要找的过程. 令 $M^3 = M^1 - \varphi.M^2$，则 M^3 是 $\boldsymbol{H}_1$- 值鞅测度，由 M^1 和 M^2 弱正交知 M^3 也是正交鞅测度. 由定理 7.3.9，对任意的 A、$B \in \mathscr{B}(S)$，我们有
$$\langle\!\langle M^2(A), M^3(B) \rangle\!\rangle_t$$
$$= \left\langle\!\!\left\langle M^2(A), M^1(B) - \int_0^t\int_B \varphi(s,x)M^3(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x) \right\rangle\!\!\right\rangle_t$$
$$= \int_0^t\int_{A\cap B} Q_{21}(s,x)\upsilon(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)$$
$$\quad - \int_0^t\int_{A\cap B} \varphi(s,x)Q_{22}(s,x)\upsilon(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)$$
$$= \int_0^t\int_{A\cap B} [Q_{21}(s,x) - Q_{21}(s,x)Q_{22}^{+}(s,x)Q_{22}(s,x)]\upsilon(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x). \tag{5.23}$$
引理 7.3.8 推得

$$Q_{22}h = 0 \Rightarrow Q_{21}h = 0, \quad \upsilon \times P\text{-}a.s., \forall h \in \boldsymbol{H}_2.$$

所以

$$Q_{21} - Q_{21}Q_{22}^{+}Q_{22} = 0, \quad \upsilon \times P\text{-}a.s. \tag{5.24}$$

(5.23) 和(5.24) 表明 M^3 和 M^2 正交. 证毕.

8

实值鞅测度的极限定理

随机过程的极限定理是近代概率论的重要分支. 自 1956 年 Yu. V. Prokhorov 和 A. V. Skorokhod 发表了他们的著名论文后，随机过程的极限定理得到了飞速发展. 本世纪 70 年代和 80 年代，由于半鞅理论和随机分析的兴起，给这一理论注入了崭新的内容和研究方法. 这一时期的成果已总结在由 J. Jacod 和 A. N. Skiryaev 合著的《Limit Theorems for Stochastic Processes》(1987)一书中.

1986 年，J. B. Walsh 在研究随机偏微分方程时提出了鞅测度的概念，并研究其基本性质. 因为鞅测度既有鞅的性质，又有随机测度的性质. 如何讨论鞅测度的极限定理是自然要提出的问题. 本书作者对这一问题进行了比较系统的研究. 这就是本章要研究的主要内容. 本章主要取材于[41,43,45].

8.1 定义和基本性质

在本章中，对任意的 $n \geqslant 1$，我们考虑带流的概率空间 $\mathscr{B}^n$

$= (\Omega^n, \mathscr{F}^n, \mathscr{F}_t^n, P^n)$，其中流$(\mathscr{F}_t^n)_{t\geqslant 0}$满足“通常条件”. 用$E^n$表示关于$P^n$的数学期望，以下我们所研究的带有指标“$n$”的集、随机变量、随机过程、鞅测度、…… 都是定义在$\mathscr{B}^n$上，以后不再叙述.

设$\boldsymbol{S}$是具有可数基的局部紧的 Hansdorff 空间. $\mathscr{B}(\boldsymbol{S})$是$\boldsymbol{S}$上的 Borel σ- 域、$\mathscr{M}_F(\boldsymbol{S})$和$\mathscr{M}_R(\boldsymbol{S})$分别表示$\mathscr{B}(\boldsymbol{S})$上有限测度和 Radon 测度所生成的线性空间.

8.1.1 定义 设M^n和M是鞅测度.

(1) 如果对任意的$f \in C_b(\boldsymbol{R}_+ \times \boldsymbol{S})$，都有

$$\int_0^{\cdot}\int_S f(s,x)M^n(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x) \xrightarrow{\mathscr{L}} \int_0^{\cdot}\int_S f(s,x)M(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x), \qquad (1.1)$$

称M^n依分布弱收敛于M，并记为$M^n \xrightarrow{w\mathscr{L}} M$.

(2) 如果对任意的$f \in C_K(\boldsymbol{R}_+ \times \boldsymbol{S})$，(1.1) 成立，称$M^n$依分布淡收敛于$M$，记为$M^n \xrightarrow{v\mathscr{L}} M$.

由定义可以看出，鞅测度序列的收敛性是鞅序列的收敛与随机测度的收敛(定义见 D. H. Thang[37]) 的有机结合.

以下我们假设M是定义在$(\Omega, \mathscr{F}, \mathscr{F}_t, P)$上的鞅测度.

8.1.2 定理 设$\boldsymbol{S} = \{a_1, a_2, \cdots, a_k\}$，$m^{n1}, \cdots, m^{nk}$和$m^1, \cdots, m^k$都是$k$个相互正交的平方可积鞅，令$M^n(A) = \sum_{i=1}^k m^{ni}\delta_{a_i}(A)$，如果$(m^{n1}, \cdots, m^{nk}) \xrightarrow{\mathscr{L}} (m^1, \cdots, m^k)$，并且

$$\sup_n \sum_{i=1}^k E^n\Big(\sup_{s\leqslant N}|\Delta m_s^{ni}|\Big) < \infty, \quad \forall\, N > 0, \qquad (1.2)$$

则$M^n \xrightarrow{v\mathscr{L}} M$，其中$M(A) = \sum_{i=1}^n m^i\delta_{a_i}(A)$.

证明　由例 6.4.7 知M^n和M均为正交鞅测度. 如果我们在$\boldsymbol{S}$上赋离散拓扑，则$\boldsymbol{S}$是局部紧的可分空间. 由(1.2)、$(m^{n1}, \cdots, m^{nk}) \xrightarrow{\mathscr{L}} (m^1, \cdots, m^k)$，及定理 4.4.18 知$\{(m^{n1}, \cdots, m^{nk})\}_{n\geqslant 1}$具有性

质 UT，并且对任意的 $f \in C_K(\boldsymbol{R}_+ \times \boldsymbol{S})$，

$$(f(\cdot,a_i),m^{n1},\cdots,m^{nk}) \xrightarrow{\mathscr{L}} (f(\cdot,a_i),m^1,\cdots,m^k), \quad i \leqslant k.$$

再由定理 4.4.11 知

$$\sum_{i=1}^{k}\int_0^{\cdot} f(s,a_i)\mathrm{d}m_s^{ni} \xrightarrow{\mathscr{L}} \sum_{i=1}^{k}\int_0^{\cdot} f(s,ai)\mathrm{d}m_s^i, \forall\ f \in C_K(\boldsymbol{R}_+ \times \boldsymbol{S}).$$

因此，我们有 $M^n \xrightarrow{v\mathscr{L}} M$. 证毕.

8.1.3 定理 设 u^n 和 u 均为 $\boldsymbol{S}$-值右连左极的可料过程，m^n 和 m 是局部平方可积鞅. 令

$$M^n(A) = \int_0^{\cdot} I_A(u_s^n)\mathrm{d}m_s^n,\ M(A) = \int_0^{\cdot} I_A(u_s)\mathrm{d}m_s, \forall\ A \in \mathscr{B}(\boldsymbol{S}).$$

如果 $(u^n,m^n) \xrightarrow{\mathscr{L}} (u,m)$，并且

$$\sup_n E^n\Big(\sup_{s\leqslant N}|\Delta m_s^n|\Big) < \infty, \qquad \forall\ N > 0, \tag{1.3}$$

则 $M^n \xrightarrow{v\mathscr{L}} M$.

证明　对任意的 $f \in C_K(\boldsymbol{R}_+ \times \boldsymbol{S})$，因为 f 有紧支集，所以 f 一致连续. 由 $(u^n,m^n) \xrightarrow{\mathscr{L}} (u,m)$，则

$$(f(\cdot,u^n),m^n) \xrightarrow{\mathscr{L}} (f(\cdot,u),m).$$

由 (1.3) 及定理 4.4.18 知 $\{m^n\}_{n\geqslant 1}$ 具有性质 UT，从而由定理 4.4.11 可推得 $\int_0^{\cdot} f(s,u_s^n)\mathrm{d}m_s^n \xrightarrow{\mathscr{L}} \int_0^{\cdot} f(s,u_s)\mathrm{d}m_s$，即

$$\int_0^{\cdot}\int_S f(s,x)M^n(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x) \xrightarrow{\mathscr{L}} \int_0^{\cdot}\int_S f(s,x)M(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x).$$

故 $M^n \xrightarrow{v\mathscr{L}} M$. 证毕.

注　定理 8.1.2 对鞅测度序列的依分布弱收敛仍然成立. 但一般情况下，定理 8.1.3 对鞅测度序列的依分布弱收敛未必成立，因为 $\boldsymbol{R}_+ \times \boldsymbol{S}$ 上的有界连续函数未必是一致连续的.

下面我们来研究鞅测度序列收敛性的等价命题.

8.1.4 定理 设 M^n 和 M 是可积的正交鞅测度，$\langle M^n\rangle = \nu^n$，$\langle M\rangle = \nu$，$\{K_n\}_{n\geqslant 1}$ 是 $\boldsymbol{S}$ 的单调递增的紧集列，$K_n \subset K^\circ_{n+1}$ $n \geqslant 1$，其中 K°_{n+1} 是 K_{n+1} 的内部. 如果对充分大的 $S < T$，

$$\lim_{k\to\infty}\overline{\lim_{n\to\infty}}P^n(\{\nu^n([S,T]\times(\boldsymbol{S}\backslash K_k)) > \varepsilon\}) = 0, \quad \forall\, \varepsilon > 0, \tag{1.4}$$

则 $M^n \xrightarrow{w\mathscr{L}} M$ 的充要条件是对 $\boldsymbol{R}_+\times\boldsymbol{S}$ 上的任一有界一致连续函数 f，

$$\int_0^\cdot\int_S f(s,x)M^n(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x) \xrightarrow{\mathscr{L}} \int_0^\cdot\int_S f(s,x)M(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x). \tag{1.5}$$

证明　我们只要证明充分性. 因为 $K_1\subset K_2\subset\cdots$ 是 $\boldsymbol{S}$ 的紧集列，并且 $K_n\subset K^\circ_{n+1}$，所以对任意的 $k\geqslant 1$，存在连续函数 φ_k，使得 $\|\varphi_k\|\leqslant 1$，并且

$$\varphi_k(x) = \begin{cases} 1, x\in[0,k]\times K_k, \\ 0, x\in([0,k+1]\times K_{k+1})^c. \end{cases}$$

对任意的 $f\in C_b(\boldsymbol{R}_+\times\boldsymbol{S})$，令 $f_k = f\varphi_k$，则 f_k 是 $\boldsymbol{R}_+\times\boldsymbol{S}$ 上具有紧支集的有界连续函数，从而 f_k 是一致连续的. 由假设(1.5) 我们有：对任意的 $k\geqslant 1$，

$$\int_0^\cdot\int_S f_k(s,x)M^n(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x) \xrightarrow{\mathscr{L}} \int_0^\cdot\int_S f_k(s,x)M(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x).$$

对任意的 $N>0,\varepsilon>0,\delta>0$，由 Lenglart 不等式可得

$$\begin{aligned} &P^n\Big(\sup_{t\leqslant N}\Big|\int_0^t\int_S[f(s,x)-f_k(s,x)]M^n(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)\Big| > \varepsilon\Big) \\ &\leqslant \frac{\delta}{\varepsilon^2} + P^n\Big(\int_0^N\int_S[f(s,x)-f_k(s,x)]^2\nu^n(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x) > \delta\Big) \\ &\leqslant \frac{\delta}{\varepsilon^2} + P^n(\nu^n([N,N+1]\times K_k^c) > c\delta). \end{aligned} \tag{1.6}$$

$$\begin{aligned} &P\Big(\sup_{t\leqslant N}\Big|\int_0^t\int_S[f(s,x)-f_k(s,x)]M(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)\Big| > \varepsilon\Big) \\ &\leqslant \frac{\delta}{\varepsilon^2} + P(\nu([N,N+1]\times K_k^c) > c\delta), \end{aligned} \tag{1.7}$$

其中 $c = \|f\|$. 因为 υ 可积，所以由(1.7)可推得

$$\int_0^t\int_S f_k(s,x)M(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x) \xrightarrow{\mathscr{L}} \int_0^t\int_S f(s,x)M(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x), k\to\infty. \tag{1.8}$$

由假设(1.4)，(1.6)可推得

$$\lim_{k\to\infty}\limsup_{n\to\infty}P^n\left(\sup_{t\leqslant N}\left|\int_0^t\int_S[f(s,x)-f_k(s,x)]M^n(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)\right|>\varepsilon\right) = 0. \tag{1.9}$$

故由(1.8)和(1.9)，我们有

$$\int_0^\cdot\int_S f(s,x)M^n(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x) \xrightarrow{\mathscr{L}} \int_0^\cdot\int_S f(s,x)M(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x).$$

因为 f 是任意的，所以 $M^n \xrightarrow{w\mathscr{L}} M$. 证毕.

在定理 8.1.3 中，如果记 $C^n = \langle m^n\rangle, C = \langle m\rangle$，假设对充分大的 $S < T$，$\sup_n E(C_T^n - C_S^n) < \infty$，

$$\lim_{k\to\infty}\limsup_{n\to\infty}P^n(\{u_s^n \in K_k^c, s > T\}) = 0,$$

并且序列 $\{C_T^n - C_S^n\}_{n\geqslant 1}$ 一致可积，则 $M^n \xrightarrow{w\mathscr{L}} M$.

事实上，由假设我们可推得当 $S < T$ 充分大时，

$$\lim_{k\to\infty}\limsup_{n\to\infty}E^n\{(C_T^n - C_S^n)I_{(u_s^n\in K_k^c, s>S)}\} = 0. \tag{1.10}$$

因此对任意 $\varepsilon > 0$，

$$\begin{aligned}
&P^n(\upsilon^n([S,T]\times K_k^c) > \varepsilon)\\
&= P^n\left(\int_S^T I_{K_k^c}(u_s^n)\mathrm{d}C_s^n > \varepsilon\right)\\
&\leqslant P^n(I_{(u_s^n\in K_k^c, S<s\leqslant T)}(C_T^n - C_S^n) > \varepsilon)\\
&\leqslant \frac{1}{\varepsilon}E^n[(C_T^n - C_S^n)I_{(u_s^n\in K_k^c, s>S)}].
\end{aligned}$$

故由(1.10)，我们有

$$\lim_{k\to\infty}\lim\sup_{n\to\infty}P^n(\upsilon^n([S,T]\times K_k^c) > \varepsilon) = 0.$$

从而由定理 8.1.4 知 $M^n \xrightarrow{w\mathscr{L}} M$.

8.1.5 定理 设 M^n 和 M 都是局部可积的正交鞅测度，$\langle M^n\rangle = \upsilon^n, \langle M\rangle = \upsilon$.

（Ⅰ）假设对 S 的任一紧子集 K,

$$\lim_{a\to\infty}\limsup_{n\to\infty} P^n(\upsilon^n([0,N]\times K) > a) = 0,\ \forall N > 0. \tag{1.11}$$

并且对任意的包含于 $\boldsymbol{R}_+\times \boldsymbol{S}$ 的紧子集内的两两互不相交的 υ- 连续集 $\{A_1,\cdots,A_k\}$,

$$\left(\int_0^\cdot\int_S I_{A_1}(s,x)M^n(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x),\cdots,\int_0^\cdot\int_S I_{A_k}(s,x)M^n(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)\right) \xrightarrow{\mathscr{L}}$$

$$\left(\int_0^\cdot\int_S I_{A_1}(s,x)M(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x),\cdots,\int_0^\cdot\int_S I_{A_k}(s,x)M(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)\right). \tag{1.12}$$

则 $M^n \xrightarrow{\upsilon\mathscr{L}} M$.

（Ⅱ）设 $M^n \xrightarrow{\upsilon\mathscr{L}} M, \{A_m\}_{m\geq 1}$ 是任意的 υ- 连续闭集列，并且满足

$$\lim_{m\to\infty} P(\upsilon(A_m) > \varepsilon) = 0,\quad \forall \varepsilon > 0. \tag{1.13}$$

如果

$$\lim_{m\to\infty}\limsup_{n\to\infty} P^n(\upsilon^n(A_m) > \varepsilon) = 0,\qquad \forall \varepsilon > 0, \tag{1.14}$$

则对 $\boldsymbol{R}_+\times \boldsymbol{S}$ 的任一含于紧集内的 υ- 连续集 A 都有

$$\int_0^\cdot\int_S I_A(s,x)M^n(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x) \xrightarrow{\mathscr{L}} \int_0^\cdot\int_S I_A(s,x)M(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x). \tag{1.15}$$

证明 （Ⅰ） 设 $f\in C_K(\boldsymbol{R}_+\times \boldsymbol{S})$，则存在 $\boldsymbol{R}_+\times \boldsymbol{S}$ 的一个紧子集 K，使得 $K\supset \mathrm{supp}(f)$，并且 $\upsilon(\partial K) = 0, P\text{-}a.s.$，其中 $\mathrm{supp}(f)$ 为 f 的支集. 因为 f 是有界函数，所以设 $a < f < b$，对任意的 $m \geq 1$，存在 $[a,b]$ 的一个分割 $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_k = b$，使得 $a_i - a_{i-1} < \frac{1}{n}, i\leq k$，并且

$$\upsilon[(\partial\{(s,x): f(s,x) = a_i\})\cap K] = 0,\ P\text{-}a.s.\quad i = 1,2,\cdots,k.$$

令 $A_i = \{(s,x): a_{i-1}\leq f(s,x) < a_i\}\cap K, i = 1,2,\cdots,k$，则 $\{A_1,$

$\cdots, A_k\}$ 两两互不相交，并且 $v(\partial A_i) = 0$, P-a.s. 所以对 $\{A_1, \cdots, A_k\}$，(1.12) 成立，记 $f_m(s,x) = \sum_{i=1}^{k} a_{i-1} I_{A_i}(s,x)$，由 (1.12) 我们有

$$\int_0^{\cdot}\int_S f_m(s,x) M^n(\mathrm{d}s, \mathrm{d}x) \xrightarrow{\mathscr{L}} \int_0^{\cdot}\int_S f_m(s,x) M(\mathrm{d}s, \mathrm{d}x). \qquad (1.16)$$

注意到 $\| f - f_m \| \leqslant \frac{1}{m}$，由 Lenglart 不等式，对任意的 $N > 0$，$\varepsilon > 0$ 和 $\delta > 0$，我们有

$$P^n\left(\sup_{t \leqslant N} \left| \int_0^t \int_S [f(s,x) - f_m(s,x)] M^n(\mathrm{d}s, \mathrm{d}x) \right| > \varepsilon \right)$$
$$\leqslant \frac{\delta}{\varepsilon^2} + P^n(v^n([0,N] \times K) > \delta m^2), \qquad (1.17)$$
$$P\left(\sup_{t \leqslant N} \left| \int_0^t \int_S [f(s,x) - f_m(s,x)] M(\mathrm{d}s, \mathrm{d}x) \right| > \varepsilon \right)$$
$$\leqslant \frac{\delta}{\varepsilon^2} + P(v([0,N] \times K) > \delta m^2). \qquad (1.18)$$

由假设及 $\varepsilon > 0, \delta > 0$ 的任意性，(1.18) 可推得

$$\lim_{m \to \infty} P\left(\sup_{t \leqslant N} \left| \int_0^t \int_S [f(s,x) - f_m(s,x)] M(\mathrm{d}s, \mathrm{d}x) \right| > \varepsilon \right) = 0, \qquad \forall N > 0.$$

因此，我们有

$$\int_0^{\cdot}\int_S f_m(s,x) M(\mathrm{d}s, \mathrm{d}x) \xrightarrow{\mathscr{L}} \int_0^{\cdot}\int_S f(s,x) M(\mathrm{d}s, \mathrm{d}x). \qquad (1.19)$$

由假设 (1.11)，(1.17) 可推得

$$\lim_{m \to \infty} \limsup_{n \to \infty} P^n\left(\sup_{t \leqslant N} \left| \int_0^t \int_S [f(s,x) - f_m(s,x)] M^n(\mathrm{d}s, \mathrm{d}x) \right| > \varepsilon \right) = 0. \qquad (1.20)$$

由 (1.16)、(1.19) 和 (1.20) 可推得

$$\int_0^{\cdot}\int_S f(s,x) M^n(\mathrm{d}s, \mathrm{d}x) \xrightarrow{\mathscr{L}} \int_0^{\cdot}\int_S f(s,x) M(\mathrm{d}s, \mathrm{d}x).$$

即 $M^n \xrightarrow{v\mathscr{L}} M$.

（Ⅰ）设 A 是 $\boldsymbol{R}_+\times \boldsymbol{S}$ 的任一子集，$\upsilon(\partial A)=0$, P-$a.s.$，并且 $A\subset K$，其中 K 为 $\boldsymbol{R}_+\times \boldsymbol{S}$ 的紧子集. 因为 $\boldsymbol{S}$ 是局部紧的，所以我们可以假设 $A\subset K^{\circ}$. 由假设知 ∂A 是 $\boldsymbol{R}_+\times \boldsymbol{S}$ 的紧子集，因此，对任意的 $m\geqslant 1$，存在 ∂A 中的点 $x_1^m,\cdots,x_{k_m}^m$ 及正数列 $0<r_m\downarrow 0$，使得 $\partial A\subset\bigcup_{i=1}^{k}S(x_i^m,r_m)$，其中 $S(x,r)$ 表示以 x 为中心，r 为半径的开球. 令

$$E_m=K\backslash[A\cup\bigcup_{i=1}^{k}S(x_i^m,r_m)],m\geqslant 1,$$

$$G_m=K\backslash[(K\backslash A)\cup\bigcup_{i=1}^{k}S(x_i^m,r_m)],m\geqslant 1.$$

则 E_m 和 G_m 均为闭集，并且 $E_m\cap G_m=\varnothing$. 因为 M 是局部可积的鞅测度，所以 υ 是取 $\mathscr{B}_+\times\mathscr{B}(\boldsymbol{S})$ 上 Radon 测度值的随机变量. 从而我们可以取到 r_m 使得 $\upsilon(\partial E_m)=0,P$-$a.s.$，因此存在函数 $f_m\in C_K(\boldsymbol{R}_+\times \boldsymbol{S})$，使得

$$f_m(x)=\begin{cases}1, & x\in G_m,\\ 0, & x\in E_m.\end{cases}$$

因为 $M^n\xrightarrow{\upsilon\mathscr{L}}M$，所以我们有

$$\int_0^{\cdot}\int_S f_m(s,x)M^n(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)\xrightarrow{\mathscr{L}}\int_0^{\cdot}\int_S f_m(s,x)M(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x),$$

$$n\to\infty. \quad (1.21)$$

注意到在 $E_m\cup G_m$ 上，$|f_m(s,x)-I_A(s,x)|=0$，在 $E_m^c\cap G_m^c$ 上，$|f_m(s,x)-I_A(s,x)|\leqslant 1$，我们有

$$P^n\left(\sup_{t\leqslant N}\left|\int_0^t\int_S[I_A(s,x)-f_m(s,x)]M^n(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)\right|>\varepsilon\right)$$

$$\leqslant\frac{\delta}{\varepsilon^2}+P^n(\upsilon^n(E_m^c\cap G_m^c)>\delta)$$

$$\leqslant\frac{\delta}{\varepsilon^2}+P^n(\upsilon^n(\overline{E_m^c\cap G_m^c})>\delta),\quad\forall N>0,\varepsilon>0,\delta>0. \quad (1.22)$$

由条件(1.13)和(1.14)可推得

$$\lim_{m\to\infty}\limsup_{n\to\infty}P^n\left(\sup_{t\leqslant N}\left|\int_0^t\int_S[I_A - f_m]M^n(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)\right|>\varepsilon\right)$$
$$= 0,\quad \forall\ \varepsilon > 0. \tag{1.23}$$
因为 $\bigcap_{m=1}^{\infty}\overline{E_m\cap G_m}=\partial A$,

$$\limsup_{m\to\infty}P\left(\sup_{t\leqslant N}\left|\int_0^t\int_S[I_A(s,x)-f_m(s,x)]M(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)\right|>\varepsilon\right)$$
$$\leqslant \varepsilon + \limsup_{m\to\infty}P(\upsilon(\overline{E_m\cap G_m})>\varepsilon^3),\quad \forall\ \varepsilon>0,$$
所以
$$\int_0^\cdot\int_S f_m(s,x)M(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)\xrightarrow{\mathscr{L}}\int_0^\cdot\int_S I_A(s,x)M(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x). \tag{1.24}$$
(1.21)、(1.23) 和(1.24) 可推得
$$\int_0^\cdot\int_S I_A(s,x)M^n(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)\xrightarrow{\mathscr{L}}\int_0^\cdot\int_S I_A(s,x)M(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x).$$
证毕.

8.1.6 推论 设 M^n 和 M 都是独立增量的局部可积的正交鞅测度,M 连续,并且(1.11)、(1.13) 和(1.14) 成立,则 $M^n\xrightarrow{\upsilon\mathscr{L}}M$ 的充要条件是对任一包含在 $\boldsymbol{R}_+\times \boldsymbol{S}$ 的紧子集内的 υ- 连续集 A,(1.15) 成立.

证明 由定理 8.1.5,我们只要证明(1.12) 成立.

假设$\{A_i\}_{i\leqslant k}$ 是包含在 $\boldsymbol{R}_+\times \boldsymbol{S}$ 的某一紧子集内的两两互不相交的 υ- 连续集列,由假设(1.15) 成立,即得
$$X^{ni}\triangleq\int_0^\cdot\int_S I_{A_i}(s,x)M^n(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)$$
$$\xrightarrow{\mathscr{L}}\int_0^\cdot\int_S I_{A_i}(s,x)M(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)\triangleq X^i,\ 1\leqslant i\leqslant k. \tag{1.25}$$
因为 M 是连续的独立增量的正交鞅测度,所以 $X=(X^1,\cdots,X^k)$ 是各分量相互独立的 $\boldsymbol{R}^k$- 值平方可积鞅. 从而 X 的分布由其各个分量的分布唯一确定. (1.25) 表明$\{X^{ni}\}_{n\geqslant1}(1\leqslant i\leqslant k)$ 连续胎紧,从而$\{X^n=(X^{n1},\cdots,X^{nk})\}_{n\geqslant1}$ 连续胎紧. 设 Y 是$\{X^n\}_{n\geqslant1}$ 的一个极

限点，则由著名的 Skorokhod 定理知存在$\{X^n\}_{n\geq 1}$的一个子序列$\{X^{n_j}\}_{j\geq 1}$，使得按 Skorokhod 拓扑，$X^{n_j} \longrightarrow Y$，$P$-$a.s.$ 但 $X^{n_j t} \to X^t$，P-$a.s.$，由 M^n 的独立增量性即得 $\mathscr{L}(Y) = \mathscr{L}(X)$. 故 $X^n \xrightarrow{\mathscr{L}} X$. 即(1.12) 成立. 证毕.

对于可积鞅测度，我们有如下的结论.

8.1.7　定理　假设 M^n 和 M 都是可积的正交鞅测度，$\langle M^n\rangle = \upsilon^n$，$\langle M\rangle = \upsilon$.

(Ⅰ) 假设

$$\lim_{a\to\infty}\limsup_{n\to\infty} P^n(\upsilon^n([0,N]\times S)) > a) = 0,\ \forall\ N > 0, \quad (1.26)$$

并且对 $\boldsymbol{R}_+ \times \boldsymbol{S}$ 的任意两两互不相交的 υ- 连续集列$\{A_1,\cdots,A_k\}$，(1.12) 成立，则 $M^n \xrightarrow{w\mathscr{L}} M$.

(Ⅱ) 设 $M^n \xrightarrow{w\mathscr{L}} M$，并且(1.13) 和(1.14) 成立，则对 $\boldsymbol{R}_+ \times \boldsymbol{S}$ 的任一 υ- 连续集 A 都有(1.15) 成立.

证明　同定理 8.1.5 的证法基本相同，故略去.

类似于推论 8.1.6，我们也有定理 8.1.7 的推论.

8.1.8　推论　设 M^n 和 M 都是独立增量的可积正交鞅测度，M 连续，并且(1.26)、(1.13) 和(1.14) 成立，则 $M^n \xrightarrow{w\mathscr{L}} M$ 的充要条件是对 $\boldsymbol{R}_+ \times \boldsymbol{S}$ 的任一 υ- 连续集 A，(1.15) 成立.

8.2　F- 鞅测度和 R- 鞅测度的极限定理

半鞅的极限定理是利用其可料特征的极限行为来刻划的，在 6.6 中，我们讨论了鞅测度可料特征的存在性. 本节我们试图利用鞅测度的可料特征来研究鞅测度的极限定理.

8.2.1　定理　设 M^n 和 M 均为正交的 R- 鞅测度，$\langle M^n\rangle = \upsilon^n$，$\langle M\rangle = \upsilon$，$\beta^n$ 和 β 分别为 M^n 和 M 的跳测度的可料对偶投影，

并且 M 是没有固定不连续点的独立增量鞅测度. 假设

(Ⅰ) $\nu^n \xrightarrow{\mathscr{L}} \nu$;

(Ⅱ) 对任意的 $f \in C_K(\boldsymbol{R}_+ \times \boldsymbol{S})$,

$$\begin{cases} \int_0^t \int_{\mathscr{M}_R(S)} \left[\int_S f(s,x) y(\mathrm{d}x) \right]^2 \beta^n(\mathrm{d}s, \mathrm{d}y) < \infty, & \forall\, t > 0, \\ \int_0^t \int_{\mathscr{M}_R(S)} \left[\int_S f(s,x) y(\mathrm{d}x) \right]^2 \beta(\mathrm{d}s, \mathrm{d}y) < \infty, & \forall\, t > 0, \end{cases} \tag{2.1}$$

并且对任意的 $t > 0$, $\delta > 0$,

$$\lim_{a \to \infty} \limsup_{n \to \infty} P^n \left\{ \int_0^t \int_{\mathscr{M}_R(S)} \left[\int_S f(s,x) y(\mathrm{d}x) \right]^2 \cdot I_{\left\{ \left| \int_S f(s,x) y(\mathrm{d}x) \right| > a \right\}} \beta^n(\mathrm{d}s, \mathrm{d}y) > \delta \right\} = 0; \tag{2.2}$$

(Ⅲ) 对任意的 $f \in C_K(\boldsymbol{R}_+ \times \boldsymbol{S}), g \in C_0^+(\boldsymbol{R}), t > 0$,

$$\int_0^t \int_{\mathscr{M}_R(S)} g\left(\int_S f(s,x) y(\mathrm{d}x) \right) \beta^n(\mathrm{d}s, \mathrm{d}y) \xrightarrow{P} \int_0^t \int_{\mathscr{M}_R(S)} g\left(\int_S f(s,x) y(\mathrm{d}x) \right) \beta(\mathrm{d}s, \mathrm{d}y), \tag{2.3}$$

则 $M^n \xrightarrow{\nu\mathscr{L}} M$.

证明　因为 M 是独立增量的鞅测度,所以由定理 6.6.5 知 ν 和 β 均为非随机. 对任意的 $f \in C_K(\boldsymbol{R}_+ \times \boldsymbol{S})$,令

$$X^n = \int_0^\cdot \int_S f(s,x) M^n(\mathrm{d}s, \mathrm{d}x),\ X = \int_0^\cdot \int_S f(s,x) M(\mathrm{d}s, \mathrm{d}x),$$

由假设知 X^n 和 X 均为平方可积鞅,并且 X 是没有固定不连续点的独立增量过程. 设 λ^n 和 λ 分别是 X^n 和 X 的跳测度的可料对偶投影. 由 6.6 的(6.2),条件(Ⅲ)可推得

$$g . \lambda^n \xrightarrow{\mathscr{L}} g . \lambda, \quad \forall\, g \in C_0^+(\boldsymbol{R}).$$

由(2.1)可推得

$$|x|^2 . \lambda_t^n < \infty,\ |x|^2 . \lambda_t < \infty, \quad \forall\, t \geqslant 0.$$

(2.2) 表明

$$\lim_{a\to\infty}\limsup_{n\to\infty}P^n(x^2I_{\{|x|>a\}}\cdot\lambda_t^n>\delta)=0,\ \forall\ t>0,\delta>0.$$

又条件(Ⅰ)意为

$$\langle X^n\rangle_t=\int_0^t\int_S f^2(s,x)\upsilon^n(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)\xrightarrow{P}\int_0^t\int_S f^2(s,x)\upsilon(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x).$$

这表明对于 X^n 和 X，定理 4.1.5 中的条件全部满足，故由定理 4.1.5 知 $X^n\xrightarrow{\mathscr{L}}X$. 因为 $f\in C_K(\boldsymbol{R}_+\times\boldsymbol{S})$ 是任意的，所以 $M^n\xrightarrow{v\mathscr{L}}M$. 证毕.

8.2.2 定理 设 M^n 和 M 均为独立增量的 R-鞅测度，M 没有固定不连续点，υ^n、υ、β^n、β 和定理 8.2.1 中的意义相同. 假设对任意的 $f\in C_K(\boldsymbol{R}_+\times\boldsymbol{S})$，$t>0$，

$$\lim_{a\to\infty}\limsup_{n\to\infty}\int_0^t\int_{\mathscr{M}_R(S)}\left[\int_S f(s,x)y(\mathrm{d}x)\right]^2\cdot I_{\left\{\left|\int_S f(s,x)y(\mathrm{d}x)\right|>a\right\}}\beta^n(\mathrm{d}s,\mathrm{d}y)=0,\tag{2.4}$$

则 $M^n\xrightarrow{v\mathscr{L}}M$ 的充要条件是

(Ⅰ) $\upsilon^n\xrightarrow{\mathscr{L}}\upsilon$;

(Ⅱ) 对任意的 $f\in C_K(\boldsymbol{R}_+\times\boldsymbol{S})$，$g\in C_0^+(\boldsymbol{R})$ 和 $t>0$，

$$\int_0^t\int_{\mathscr{M}_R(S)}g\left(\int_S f(s,x)y(\mathrm{d}x)\right)\beta^n(\mathrm{d}s,\mathrm{d}y)\longrightarrow\int_0^t\int_{\mathscr{M}_R(S)}g\left(\int_S f(s,x)y(\mathrm{d}x)\right)\beta(\mathrm{d}s,\mathrm{d}y).$$

证明　对任意的 $f\in C_K(\boldsymbol{R}_+\times\boldsymbol{S})$，定义 X^n、X 和定理 8.2.1 证明中相同，则 X^n 和 X 是独立增量的平方可积鞅，并且 X 没有固定不连续点. 设 λ^n 和 λ 分别为 X^n 和 X 的跳测度的可料对偶投影，则由条件(2.4)可知

$$\lim_{a\to\infty}\limsup_{n\to\infty}|x|^2I_{\{|x|>a\}}\cdot\lambda_t^n=0,\ \forall\ t>0.$$

由定理 4.1.1 知 $X^n\xrightarrow{\mathscr{L}}X$ 的充要条件是

a) $\langle X^n\rangle_t \longrightarrow \langle X\rangle_t$, $\forall\, t > 0$;

b) $g.\lambda_t^n \longrightarrow g.\lambda_t$, $\forall\, t > 0$, $g \in C_0^+(R)$.

由条件(Ⅰ)和(Ⅱ),即得 a) 和 b) 成立. 证毕.

8.2.3 定理 设M是正交的R-鞅测度,M是独立增量的连续鞅测度,$\langle M^n\rangle = \upsilon^n$, $\langle M\rangle = \upsilon$. 假设

(Ⅰ) $\upsilon^n \xrightarrow{\mathscr{L}} \upsilon$;

(Ⅱ) 对任意的 $a > 0$, $N > 0$ 和 S 的任一紧子集 K,

$$\lim_{n\to\infty} P^n\left(\sup_{t\leqslant N} |M^n(\{t\} \times K)| > a\right) = 0,$$

并且 $|M^n(\{t\} \times K)| \leqslant C$,其中 $C > 0$ 为常数,$|M^n(\{t\} \times K)|$ 表示随机测度 $M^n(\{t\} \times \mathrm{d}x)$ 在 K 上的全变差,

则 $M^n \xrightarrow{\upsilon\mathscr{L}} M$.

证明 因为 $\upsilon^n \xrightarrow{\mathscr{L}} \upsilon$,并且 υ 非随机. 则

$$\int_0^t\int_S f(s,x)\upsilon^n(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x) \xrightarrow{P} \int_0^t\int_S f(s,x)\upsilon(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x),$$

$$\forall\, t > 0,\quad 0 \leqslant f \in C_K(\boldsymbol{R}_+ \times \boldsymbol{S}). \tag{2.5}$$

设 X、X^n、λ^n 和定理 8.2.2 的证明中相同,则由(2.5)可得

$$\langle X^n\rangle_t = \int_0^t\int_S f^2(s,x)\upsilon^n(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)$$

$$\xrightarrow{P} \int_0^t\int_S f^2(s,x)\upsilon(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x) = \langle X\rangle_t, \forall\, t > 0; \tag{2.6}$$

并且对任意的 $g \in C_0^+(\boldsymbol{R})$,

$$g.\lambda_t^n \leqslant CI_{\{|x|>a\}}.\lambda_t^n = C\,\lambda^n([0,t] \times \{|x| > a\}), \tag{2.7}$$

其中常数 $a > 0$,$C > 0$ 满足条件 $g \leqslant C$ 并且对于 $|x| \leqslant a$,$g(x) = 0$.

由引理 3.4.6 知$\lim\limits_{n\to\infty} P^n\left(\sup\limits_{t\leqslant N} |\Delta X_t^n| > a\right) = 0$ 等价于

$\lim\limits_{n\to\infty} P^n(\lambda^n([0,t] \times \{|x| > a\}) > \epsilon) = 0$, $\forall\, \epsilon > 0$.

因为 $|\Delta X_t^n| \leqslant C_1 \sup\limits_{s\leqslant t}|M^n(\{s\}\times K)| \leqslant C_1 C$,

$$P^n\Big(\sup_{t\leqslant N}|\Delta X_t^n| > a\Big) \leqslant P^n(\sup_{t\leqslant N} C_1|M^n(\{t\}\times K)| > a),$$

其中 $\|f\| \leqslant C_1$, K 是 S 的任意满足条件 $\mathrm{supp}(f)\subset K$ 的紧子集. 由条件(Ⅱ)及(2.7)即得

$$g.\lambda_N^n \xrightarrow{P} 0, \quad \forall N > 0. \tag{2.8}$$

从而由定理 4.1.3,(2.6)和(2.8)可推得 $X^n \xrightarrow{\mathscr{L}} X$. 由 f 的任意性,我们有 $M^n \xrightarrow{v\mathscr{L}} M$. 证毕.

8.2.4 注 在上述三个定理中,如果将 $\mathscr{M}_R(S)$ 换为 $\mathscr{M}_F(S)$, S 的紧子集换为整个空间 S,则上述三个定理中的结论对于 F-鞅测度仍然成立. 为了避免重复,在此就不再叙述.

由定理 8.2.3 可立即得到如下推论.

8.2.5 推论 设 $S=\{a_1,a_2,\cdots,a_k\}$, $m^{n1},\cdots,m^{nk}$ 和 $m^1,\cdots,m^k$ 分别是 k 个相互正交的局部平方可积鞅和 k 个相互正交的独立增量的连续局部鞅, $\langle m^{ni}\rangle = C^{ni}$, $\langle m^i\rangle = C^i$, $|\Delta m^{ni}| \leqslant b$, $i=1,2,\cdots,k$, $n\geqslant 1$,记 λ^{ni} 是 m^{ni} 的跳测度的可料对偶投影,令

$$M^n(A) = \sum_{i=1}^k m^{ni}\delta_{a_i}(A),\ M(A) = \sum_{i=1}^k m^i\delta_{a_i}(A),$$

如果假设

(Ⅰ) $C_t^{ni} \xrightarrow{P} C_t^i$, $\forall t>0$, $(i=1,2,\cdots,k)$,并且

$$\lim_{b\to\infty}\sup_{n\geqslant 1} P^n\Big(\sum_{i=1}^k C_t^{ni} > b\Big) = 0,\ \forall t>0;$$

(Ⅱ) $\lim\limits_{n\to\infty} P^n(\lambda^{ni}([0,t]\times\{|x|>a\})>\varepsilon) = 0$,

$$\forall \varepsilon>0,\ a>0.$$

则 $M^n \xrightarrow{v\mathscr{L}} M$.

8.2.6 定理 设 M^n 是强正交的 R-鞅测度, M 是连续的独

立增量的正交鞅测度，$[M^n]=\mu^n$，$\langle M\rangle=\upsilon$，$\upsilon^n=(\mu^n)^p$. 如果对任意的紧集 $K\subset \boldsymbol{S}$，

$$|M^n(\{t\}\times K)|\leqslant C,\ \forall\ n\geqslant 1,\ t>0, \tag{2.9}$$

则下列叙述等价：

（Ⅰ）$M^n\xrightarrow{v\mathscr{L}}M$；

（Ⅱ）$\mu^n\xrightarrow{\mathscr{L}}\upsilon$；

（Ⅲ）$\upsilon^n\xrightarrow{\mathscr{L}}\upsilon$，并且

$$\lim_{n\to\infty}P^n(\lambda_f^n([0,t]\times\{|x|>a\})>\varepsilon)=0,$$

$$\forall\ t>0,\ a>0,\ \varepsilon>0,\ f\in C_K(\boldsymbol{R}_+\times\boldsymbol{S}).$$

其中 λ_f^n 是平方可积鞅 $\int_0^t\int_S f(s,x)M^n(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)$ 的跳测度的可料对偶投影.

证明　对任意的 $f\in C_K(\boldsymbol{R}_+\times\boldsymbol{S})$，记 X^n、X 和定理 8.2.3 的证明中相同. 由(2.9)我们有 $|\Delta X^n|\leqslant C$. 由定理 4.1.3 知下列叙述等价：

(a) $X^n\xrightarrow{\mathscr{L}}X$；

(b) $[X_n]_t\xrightarrow{P}\langle X\rangle_t$，$\forall\ t>0$；

(c) $\langle X^n\rangle_t\xrightarrow{P}\langle X\rangle_t$，并且

$$\lim_{n\to\infty}P^n(\lambda_f^n([0,t]\times\{|x|>a\})>\varepsilon)=0,$$

$\forall\ t>0,\ a>0,\ \varepsilon>0.$

因此，定理成立. 证毕.

8.2.7　定理　设 M^n 和 M 与定理 8.2.6 中的相同. 如果对任意的 $\delta>0$，$t>0$ 和 $f\in C_K(\boldsymbol{R}_+\times\boldsymbol{S})$，

$$\lim_{a\to\infty}\limsup_{n\to\infty}P^n\Big\{\int_0^t\int_{\mathscr{M}_R(S)}\Big|\int_S f(s,x)y(\mathrm{d}x)\Big|$$

$$\cdot I_{\{|\int_S f(s,x)y(\mathrm{d}x)|>a\}}\beta^n(\mathrm{d}s,\mathrm{d}y)>\delta\Big\}=0. \tag{2.10}$$

则下列两个结论等价：

（Ⅰ）$M^n \xrightarrow{v\mathscr{L}} M$；

（Ⅱ）$\mu^n \xrightarrow{\mathscr{L}} \upsilon$.

证明　对任意的 $f \in C_K(\mathbf{R}_+ \times \mathbf{S})$，记 X^n、X 和定理 8.2.6 中的相同.（2.10）可推得

$$\lim_{a\to\infty}\limsup_{n\to\infty} P^n(|x| I_{\{|x|>a\}}\cdot \lambda_t^n > \delta) = 0,\quad \forall\, t > 0,\quad \delta > 0.$$

从而由定理 4.1.4 我们有下列叙述等价：

(a) $X^n \xrightarrow{\mathscr{L}} X$；

(b) $[X^n]_t \xrightarrow{P} [X]_t$，$\forall\, t > 0$.

定理得证.

8.2.8　注　对可积的 F- 鞅测度的依分布弱收敛，定理 8.2.6 和定理 8.2.7 中的结论仍然成立.

对于独立增量鞅测度的收敛性，我们有如下命题：

8.2.9　定理　设 M^n 是独立增量的正交 R- 鞅测度，M 是正交的独立增量连续鞅测度. 如果对任意的 $\mathbf{S}$ 紧子集 K，

$$\lim_{n\to\infty} P^n\Big(\sup_{s\leq N} |M^n(\{s\} \times K)| > \varepsilon\Big) = 0,\ \forall\, N > 0,\ \varepsilon > 0,\tag{2.11}$$

并且

$$\int_0^t\int_{\mathscr{M}_R(S)}\Big[\int_S f(s,x)y(\mathrm{d}x)\Big]^2 I_{\{|\int_S f(s,x)y(\mathrm{d}x)|>\varepsilon\}}\,\beta^n(\mathrm{d}s,\mathrm{d}y)$$

$$\xrightarrow{P} 0,\qquad\qquad \forall\, \varepsilon > 0,\ t > 0,$$

则 $M^n \xrightarrow{v\mathscr{L}} M$ 的充要条件是 $\upsilon^n \xrightarrow{\mathscr{L}} \upsilon$.

证明　由定理 8.2.3，只要证明必要性.

假设 $M^n \xrightarrow{v\mathscr{L}} M$，则 $\forall\, f \in C_K(\mathbf{R}_+ \times \mathbf{S})$，

$$\int_0^{\cdot}\int_S f(s,x)M^n(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x) \xrightarrow{\mathscr{L}} \int_0^{\cdot}\int_S f(s,x)M(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x). \tag{2.12}$$

如果记

$$X^n = \int_0^{\cdot}\int_S f(s,x)M^n(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x),\ X = \int_0^{\cdot}\int_S f(s,x)M(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)$$

则 X^n 和 X 都是独立增量的平方可积鞅，并且 X 连续. 从而由 (2.12) 知 $X^n \xrightarrow{\mathscr{L}} X$. 又

$$\langle X^n\rangle = \int_0^{\cdot}\int_S f^2(s,x)\nu^n(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x),$$

$$\langle X\rangle = \int_0^{\cdot}\int_S f^2(s,x)\nu(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x).$$

故由定理 4.1.1 知 $\forall\ N > 0$,

$$\sup_{t\leqslant N}\left|\int_0^t\int_S f^2(s,x)\nu^n(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x) - \int_0^t\int_S f^2(s,x)\nu(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)\right| \to 0.$$

由于 f 具有紧支集，所以

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\infty}\int_S f^2(s,x)\nu^n(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x) = \int_0^{\infty}\int_S f^2(s,x)\nu(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x).$$

因此我们有$\forall\ 0 \leqslant f \in C_K(\boldsymbol{R}_+ \times \boldsymbol{S})$,

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\infty}\int_S f(s,x)\nu^n(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x) = \int_0^{\infty}\int_S f(s,x)\nu(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x).$$

为了去掉 $f \geqslant 0$ 的限制，对 $f \in C_K(\boldsymbol{R}_+ \times \boldsymbol{S})$，分别考虑 f^+ 和 f^-，并注意到$\int_0^{\infty}\int_S f^{\pm}(s,x)\nu(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)$ 非随机且有限，从而可得 $\nu^n \xrightarrow{\mathscr{L}} \nu$. 证毕.

对于可积的 F- 鞅测度，我们也有类似的结论. 在此就不再重复.

8.3 随机积分的收敛性

在 4.4 中，我们研究了关于半鞅的随机积分的收敛，而在本章

前两节，我们又研究了鞅测度的极限定理，那么自然就要提出这样一个问题：如何讨论关于鞅测度的随机积分的收敛性？本节将对这个问题进行一些研究.

8.3.1　定理　设 M^n 是正交的 R-鞅测度，M 是连续的独立增量鞅测度，$\langle M^n\rangle = \upsilon^n$，$\langle M\rangle = \upsilon$. 假设

(Ⅰ) $\upsilon^n \xrightarrow{\mathscr{L}} \upsilon$;

(Ⅱ) 对 $\boldsymbol{S}$ 的任意紧子集 K,

$$P^n\left(\sup_{s\leqslant N}|M^n(\{s\}\times K)|>a\right)\to 0,\ \forall\ N>0,\ a>0.$$

如果 $f^n\in L^2_{\upsilon^n}$，$f\in L^2_{\upsilon}$ 是实值可测函数，并且满足条件 $f^n\xrightarrow{c.c.} f(\upsilon\text{-}a.s.)$，$\{f^n\}_{n\geqslant 1}$ 一致有界，则 $f^n.M^n\xrightarrow{\upsilon\mathscr{L}} f.M$.

特别地，如果 f^n 和 f 在 $\boldsymbol{R}_+\times\boldsymbol{S}$ 的某一紧子集 K 之外为 0，则我们有

$$\int_0^t\int_S f^n(s,x)M^n(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)\xrightarrow{\mathscr{L}}\int_0^t\int_S f(s,x)M(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x).$$

证明　注意到 $\langle f^n.M^n\rangle=(f^n)^2.\upsilon^n$，$\langle f.M\rangle = f^2.\upsilon$，对任意的 $g\in C_K(\boldsymbol{R}_+\times\boldsymbol{S})$，我们知道 g 是一致连续的，由 $f^n\xrightarrow{c.c.} f(\upsilon\text{-}a.s.)$ 知 $(gf^n)^2\xrightarrow{c.c.}(gf)^2(\upsilon\text{-}a.s.)$. 因为 g 有紧支集，所以在 $\mathrm{supp}(g)$ 之外，$(gf^n)^2$ 和 $(gf)^2$ 均为 0. 由于 υ 是随机连续的，所以由引理 2.4.2 我们有

$$\int_0^t\int_S (gf^n)^2\upsilon^n(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)\xrightarrow{P}\int_0^t\int_S(gf)^2\upsilon(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x),\ \forall\ t>0. \tag{3.1}$$

对 $\boldsymbol{S}$ 的任一紧子集 K，$N>0$，由于

$$\sup_{s\leqslant N}|(f^n.M^n)(\{s\}\times K)|$$
$$=\sup_{s\leqslant N}\left|\int_K f^n(s,x)M^n(\{s\}\times\mathrm{d}x)\right|\leqslant C\cdot\sup_{s\leqslant N}|M^n(\{s\}\times K)|,$$

其中 C 是常数，因此由假设可以推得

$$P^n\left(\sup_{s\leqslant N}|(f^n.M^n)(\{s\}\times K)|>\varepsilon\right)$$

$$\leqslant P^n\left(\sup_{s\leqslant N}|M^n(\{s\}\times K)|>\frac{\varepsilon}{C}\right)\to 0. \qquad (3.2)$$

由定理 8.2.3，(3.1) 和(3.2) 可推得 $f^n.M^n\xrightarrow{v\mathscr{L}}f.M$.

定理中的第二个结论是显然的. 证毕.

在定理 8.3.1 中，$\{f^n\}_{n\geqslant 1}$ 有一致的紧支集的要求是相当强的，下面我们要把这个条件减弱. 设 $K_1\subset K_2\subset\cdots$ 是 S 的一列单调递增的紧集列，$\bigcup_{n=1}^{\infty}K_n=S$，并且 $K_n\subset K^{\circ}_{n+1}, n\geqslant 1$.

8.3.2 定理 设 M^n 和 M 满足定理 8.3.1 中的条件. $f^n\in L^2_{v^n}, f\in L^2_v$ 是一致有界的实可测函数. 如果 $f^n\xrightarrow{c.c.}f(v\text{-}a.s.)$，并且 $\forall\ \varepsilon>0, t>0$，

$$\lim_{k\to\infty}\limsup_{n\to\infty}P^n\left(\int_0^t\int_{S\setminus K_k}[f^n(s,x)]^2v^n(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)>\varepsilon\right)=0, \qquad (3.3)$$

则 $f^n.M^n\xrightarrow{v\mathscr{L}}f.M$，并且

$$X^n\triangleq\int_0^{\cdot}\int_S f^n(s,x)M^n(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)$$

$$\xrightarrow{\mathscr{L}}\int_0^{\cdot}\int_S f(s,x)M(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)=X.$$

证明 同定理 8.3.1 一样证明我们可得 $f^n.M^n\xrightarrow{v\mathscr{L}}f.M$. 下面我们只要证明第二个结论成立.

设 $\varphi_k, k\geqslant 1$ 是实值连续函数，并且满足

$$I_{K_k}\leqslant\varphi_k\leqslant I_{K_{k+1}},\ k\geqslant 1.$$

定义

$$X^{nk}=\int_0^{\cdot}\int_S\varphi_k(x)f^n(s,x)M^n(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x),$$

$$X^k = \int_0^t \int_S \varphi_k(x) f(s,x) M(\mathrm{d}s, \mathrm{d}x).$$

对任意的 $k \geqslant 1$，由引理 2.4.2 我们有

$$\langle X^{n,k} \rangle_t = \int_0^t \int_S [\varphi_k(x) f^n(s,x)]^2 v^n(\mathrm{d}s, \mathrm{d}x)$$

$$\xrightarrow{P} \int_0^t \int_S [\varphi_k(x) f(s,x)]^2 v(\mathrm{d}s, \mathrm{d}x) = \langle X^k \rangle_t, \ \forall\, t > 0.$$

因为 $\langle X^{nk} \rangle$ 和 $\langle X^k \rangle$ 均为增过程，并且 $\langle X^k \rangle$ 非随机，所以上式可推得

$$\langle X^{nk} \rangle \xrightarrow{\mathscr{L}} \langle X^k \rangle, \quad \forall\, k \geqslant 1. \tag{3.4}$$

另一方面，因为

$$P^n\left(\sup_{t \leqslant N} |\Delta X_t^{nk}| > \varepsilon \right) \leqslant P^n\left(\sup_{t \leqslant N} |M^n(\{t\} \times K_{k+1})| > \frac{\varepsilon}{C} \right),$$

$$\forall\, N > 0,\ \varepsilon > 0,$$

所以

$$\lim_{n \to \infty} P^n\left(\sup_{t \leqslant N} |\Delta X_t^{nk}| > \varepsilon \right) = 0,\ \forall\, N > 0,\ \varepsilon > 0. \tag{3.5}$$

又由假设知 $|\Delta X^{nk}| \leqslant C_1$，故定理 4.1.3，(3.4) 和 (3.5) 可推得

$$X^{nk} \xrightarrow{\mathscr{L}} X^k,\ \forall\, k \geqslant 1. \tag{3.6}$$

由 Lenglart 不等式，对任意的 $\varepsilon > 0$，$\delta > 0$ 和 $N > 0$，

$$P\left(\sup_{t \leqslant N} |X_t - X_t^k| > \varepsilon \right)$$

$$\leqslant \frac{\delta}{\varepsilon^2} + P\left(\int_0^N \int_{S \setminus K_k} f^2(s,x) v(\mathrm{d}s, \mathrm{d}x) > \delta \right), \tag{3.7}$$

$$P^n\left(\sup_{t \leqslant N} |X_t^{nk} - X_t^n| > \varepsilon \right)$$

$$\leqslant \frac{\delta}{\varepsilon^2} + P\left(\int_0^N \int_{S \setminus K_k} [f^n(s,x)]^2 v^n(\mathrm{d}s, \mathrm{d}x) > \delta \right). \tag{3.8}$$

因为 $f \in L_v^2$，所以由 (3.7) 可推得

$$X^k \xrightarrow{\mathscr{L}} X. \tag{3.9}$$

由假设 (3.3) 及 $\varepsilon > 0$，$\delta > 0$ 的任意性，我们有

$$\lim_{k \to \infty} \limsup_{n \to \infty} P^n\left(\sup_{t \leqslant N} |X_t^{nk} - X^n| > \varepsilon \right) = 0. \tag{3.10}$$

故由(3.6)、(3.9)和(3.10)可得 $X^n \xrightarrow{\mathscr{L}} X$. 证毕.

8.3.3 定理 假设 M^n、M、f^n 和 f 与定理 8.3.2 中的相同，但把条件(3.3)换为

$$\lim_{k\to\infty}\limsup_{n\to\infty}\{|f^n(s,x)|:0\leqslant s\leqslant N,x\overline{\in}K_k\}=0,\quad\forall N>0. \tag{3.11}$$

定义

$$X^n=\int_0^{\cdot}\int_S f^n(s,x)M^n(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x),$$

$$X^{nk}=\int_0^{\cdot}\int_{S\setminus K_k} f^n(s,x)M^n(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x),$$

如果

$$\lim_{k\to\infty}\limsup_{n\to\infty}P^n(\langle X^{nk}\rangle_t>\varepsilon)=0,\quad\forall t>0,\ \varepsilon>0, \tag{3.12}$$

则在 M^n 和 M 满足定理 8.3.1 的条件下，

$$X^n\xrightarrow{\mathscr{L}}\int_0^{\cdot}\int_S f(s,x)M(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x).$$

证明 这个定理的证明方法和定理 5.2.5 的证法基本相同. 这里仅写出主要的步骤.

设 φ_k 和定理 8.3.2 证明中相同，对任意的 $T>0$，定义

$$\xi_k^n=\int_0^T\int_S[\varphi_{k+1}(x)-\varphi_k(x)](f^n(s,x))^2\upsilon^n(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x),\quad\forall k,n\geqslant 1$$

和

$$a_k=\int_0^T\int_S[\varphi_{k+1}(x)-\varphi_k(x)]f^2(s,x)\upsilon(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x),\quad\forall k\geqslant 1.$$

由假设 $\upsilon^n\xrightarrow{\mathscr{L}}\upsilon$ 可得

$$\xi_k^n\xrightarrow{P}a_k,\ n\to\infty,\quad\forall k\geqslant 1.$$

因为 $f\in L_\upsilon^2$，所以

$$\sum_{k=1}^{\infty}a_k\leqslant\int_0^T\int_S f^2(s,x)\upsilon(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)<\infty.$$

从而由引理 5.2.4 知存在 $k_1 \leqslant k_2 \leqslant \cdots \leqslant k_n \to \infty$，使得

$$\lim_{m\to\infty} \limsup_{n\to\infty} P^n\Big(\sum_{k=m}^{k_n} \xi_k^n > \varepsilon\Big) = 0, \quad \forall\, \varepsilon > 0, \tag{3.13}$$

并且

$$\sum_{k=1}^{k_n} \xi_k^n \xrightarrow{P} \sum_{k=1}^{\infty} a_k,\ n \to \infty. \tag{3.14}$$

记 $f_n^{(1)}(t,x) = f^n(t,x) I_{K_{k_n}}(x)$，$f_n^{(2)}(s,x) = f^n(s,x) - f_n^{(1)}(s,x)$. 定义

$$W_n = \int_0^{\cdot}\int_S f_n^{(2)}(s,x) M^n(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x),$$

$$Y^n = \int_0^{\cdot}\int_S f_n^{(1)}(s,x) M^n(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x).$$

则对于 $m \leqslant k_n$，我们有

$$\begin{aligned}
&\int_0^T\int_{S\setminus K_{m+1}} |f_n^{(1)}(s,x)|^2 v^n(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x) \\
\leqslant &\int_0^T\int_S [\varphi_{k_n+1}(x) - \varphi_m(x)][f^n(s,x)]^2 v^n(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x) \\
\leqslant &\sum_{k=m}^{k_n} \xi_k^n.
\end{aligned}$$

(3.13) 表明 $\forall\, \varepsilon > 0$，

$$\lim_{m\to\infty} \limsup_{n\to\infty} P^n\Big(\int_0^T\int_{S\setminus K_{m+1}} |f_n^{(1)}(s,x)|^2 v^n(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x) > \varepsilon\Big) = 0. \tag{3.15}$$

对于 $1 < m \leqslant k_n$，因为

$$\begin{aligned}
&|\langle W^n\rangle_t - \langle X^{nm}\rangle_t| \\
\leqslant &|\langle W^n, W^n - X^{nm}\rangle_t| + |\langle W^n - X^{nm}, X^{nm}\rangle_t| \\
\leqslant &\langle W^n\rangle_t^{\frac{1}{2}} \langle W^n - X^{nm}\rangle_t^{\frac{1}{2}} + \langle X^{nm}\rangle_t^{\frac{1}{2}} \langle X^n - X^{nm}\rangle_t^{\frac{1}{2}} \\
\leqslant &2\Big(\sum_{k=1}^{k_n} \xi_k^n\Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\sum_{k=m-1}^{k_n} \xi_k^n\Big)^{\frac{1}{2}},
\end{aligned}$$

所以由(3.13)和(3.14)我们容易推得

$$\lim_{m\to\infty}\limsup_{n\to\infty}P^n(|\langle W^n\rangle_t - \langle X^{nm}\rangle_t| > \varepsilon) = 0, \quad \forall\, \varepsilon > 0. \tag{3.16}$$

(3.12)和(3.16)表明

$$\lim_{n\to\infty}P^n(\langle W^n\rangle_t > \varepsilon) = 0, \quad \forall\, t > 0.$$

由此即得 $W^n \xrightarrow{\mathscr{L}} 0$. 利用定理 8.3.2,(3.15)可推得

$$Y^n \xrightarrow{\mathscr{L}} \int_0^{\cdot}\int_S f(s,x)M(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x).$$

故 $X^n = Y^n + W^n \xrightarrow{\mathscr{L}} \int_0^{\cdot}\int_S f(s,x)M(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)$. 证毕.

8.3.4 定理 设 M^n 是强正交的 R-鞅测度, M 是连续的独立增量的正交鞅测度, $[M^n] = \mu^n$, $\langle M\rangle = v$, $v^n = (\mu^n)^p$, 并且对任意的紧集 $K \subset \boldsymbol{S}$,

$$|M^n(\{t\}\times K)| \leqslant C, \quad \forall\, n \geqslant 1,\ t > 0. \tag{3.17}$$

如果 $f^n \in L^2_{v^n}$, $f \in L^2_v$ 是实值可测函数, 并且 $f^n \xrightarrow{c.c.} f(v\text{-}a.s.)$, $\{f^n\}_{n\geqslant 1}$ 一致有界, 则下列叙述等价:

(Ⅰ) $f^n.M^n \xrightarrow{v\mathscr{L}} f.M$;

(Ⅱ) $(f^n)^2\mu^n \xrightarrow{\mathscr{L}} f^2 v$;

(Ⅲ) $(f^n)^2 v^n \xrightarrow{\mathscr{L}} f^2 v$, 并且对任意的 $t > 0$, $a > 0$, $\varepsilon > 0$ 和 $f \in C_K(\boldsymbol{R}_+ \times \boldsymbol{S})$,

$$\lim_{n\to\infty}P^n(\eta_f^n([0,t]\times\{|x| > a\}) > \varepsilon) = 0, \tag{3.18}$$

其中 η_f^n 是平方可积鞅 $\int_0^{\cdot}\int_S f(s,x)f^n(s,x)M^n(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)$ 的跳测度的可料对偶投影.

证明 因为 $[f^n.M^n] = (f^n)^2\mu^n$, $\langle f^n.M^n\rangle = (f^n)^2 v^n$, $\langle f.M\rangle = f^2 v$, 而且对任意紧子集 $K \subset \boldsymbol{S}$, 注意到 $\{f^n\}_{n\geqslant 1}$ 一致有界, 由 (3.17)

$$|f^n.M^n(\{t\}\times K)|\leqslant C',\quad \forall\, n\geqslant 1,\, t>0.$$

所以由定理 8.2.6 即得定理的结论成立. 证毕.

8.3.5 推论 假设 M^n、M、f^n 和 f 满足定理 8.3.4 中的条件,如果 $\mu^n \xrightarrow{\mathscr{L}} \upsilon$,则 $f^n.M^n \xrightarrow{\upsilon\mathscr{L}} f.M$.

证明 因为 $f^n \xrightarrow{c.c.} f(\upsilon\text{-}a.s.)$,$\{f^n\}_{n\geqslant 1}$ 一致有界,所以 $(f^n)^2 \xrightarrow{c.c.} f^2(\upsilon\text{-}a.s.)$. 对任意的 $g\in C_K(\boldsymbol{R}_+\times \boldsymbol{S})$,由 g 的一致连续性知 $g(f^n)^2 \xrightarrow{c.c.} gf^2(\upsilon\text{-}a.s.)$,且在紧集 $\mathrm{supp}(g)$ 外 $g(f^n)^2$ 和 gf^2 均为 0. 由于 υ 是随机连续的,所以由引理 2.4.2 知

$$\int_0^t\int_S g(f^n)^2\mu^n(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x) \xrightarrow{P} \int_0^t\int_S gf^2\upsilon(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x),\quad \forall\, t>0.$$

从而有

$$\int_0^\infty\int_S g(f^n)^2\mu^n(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x) \xrightarrow{P} \int_0^\infty\int_S gf^2\upsilon(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)$$

故 $(f^n)^2\mu^n \xrightarrow{\mathscr{L}} f^2\upsilon$. 由定理 8.3.4 知 $f^n.M^n \xrightarrow{\upsilon\mathscr{L}} f.M$. 证毕.

8.3.6 推论 在定理 8.3.4 的条件下,如果 $\{f^n\}_{n\geqslant 1}$ 和 $\{(f^n)^{-1}\}_{n\geqslant 1}$ 均为一致有界,并且 $(f^n)^{-1}\in L^2_{(f^n)^2\upsilon^n}$,$f^{-1}\in L^2_{f^2\upsilon}$,则下述等价:

(Ⅰ) $f^n.M^n \xrightarrow{\upsilon\mathscr{L}} f.M$;

(Ⅱ) $\mu^n \xrightarrow{\mathscr{L}} \upsilon$;

(Ⅲ) $\upsilon^n \xrightarrow{\mathscr{L}} \upsilon$,并且对任意的 $t>0$, $a>0$, $\epsilon>0$ 和 $f\in C_K(\boldsymbol{R}_+\times \boldsymbol{S})$,

$$\lim_{n\to\infty} P^n(\lambda_f^n([0,t]\times\{|x|>a\})>\epsilon)=0,$$

其中 λ_f^n 是平方可积鞅 $\int_0^\cdot\int_S f^n(s,x)M^n(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)$ 的跳测度的可料对偶投影.

证明 由定理 8.2.6 知(Ⅰ)和(Ⅱ)等价. 推论 8.3.5 可推得

(Ⅱ)⇒(Ⅰ). 因此只要证明(Ⅰ)⇒(Ⅱ).

假设(Ⅰ)成立，则由定理 8.3.4 知 $(f^n)^2\mu^n \xrightarrow{\mathscr{L}} f^2\upsilon$. 因为 $\{f^n\}_{n\geq 1}$ 一致有界，并且 $f^n \xrightarrow{c.c.} f(\upsilon\text{-}a.s.)$，所以 $(f^n)^{-1} \xrightarrow{c.c.} f^{-1}(\upsilon\text{-}a.s.)$，从而 $(f^n)^{-1} \xrightarrow{c.c.} f^{-1}(f^2\upsilon\text{-}a.s.)$. 和推论 8.3.5 的证明相同，我们有

$$(f^n)^{-2}(f^n)^2\mu^n \xrightarrow{\mathscr{L}} f^{-2}f^2\upsilon.$$

即 $\mu^n \xrightarrow{\mathscr{L}} \upsilon$. 证毕.

8.4 随机微分方程的稳定性

本节中，我们研究如下形式的随机微分方程的稳定性：

$$X^n = X_0^n + \int_0^{\cdot}\int_{\boldsymbol{R}} a_n(s,X_{s-}^n,x)M^n(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)$$
$$+ \int_0^{\cdot}\int_{\boldsymbol{R}} b_n(s,X_{s-}^n,x)\upsilon^n(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x), \tag{4.1}$$

其中 M^n 是正交的 R-鞅测度，$\langle M^n\rangle = \upsilon^n$，$a_n(s,x,y)$ 和 $b_n(s,x,y)$ 均为 $\boldsymbol{R}_+ \times \boldsymbol{R}^2$ 上的可测函数.

8.4.1 定理 设 M 是连续的独立增量的正交鞅测度，$\langle M\rangle = \upsilon$，并且

(A_1) $\upsilon^n \xrightarrow{\mathscr{L}} \upsilon$，对任意的 $t>0$，$\upsilon([0,t]\times \boldsymbol{R}) < \infty$；

(A_2) 对任意的 $t>0$，$\upsilon^n([0,t]\times \boldsymbol{R}) < \infty$，

$$\lim_{N\to\infty} \limsup_{n\to\infty} P^n(\upsilon^n([0,t]\times\{|x|>N\}) > \varepsilon) = 0, \quad \forall\, \varepsilon > 0,$$

并且

$$\sup_{s\leq t} |M^n(\{s\}\times \boldsymbol{R})| \xrightarrow{P} 0;$$

(A_3) 设 $a_n(s,x,y) = u_n(s,x)v_n(y)$，存在常数 $C>0$ 使得 $|a_n|$

$\leqslant C, |b_n| \leqslant C, |v_n| \leqslant C$. 又存在可测函数 $a(s,x,y) = u(s,x)v(y), b(s,x,y)$ 使得 $\{u, u_n, n \geqslant 1\}$ 满足条件 (L), $v_n \xrightarrow{c.c.} v$ (υ-a.s.), 并且对任意的 $(s,x,y) \in \boldsymbol{R}_+ \times \boldsymbol{R}^2$, 对每个收敛于 (s,x,y) 的序列 $\{(s_n,x_n,y_n)\}_{n\geqslant 1}$, $b_n(s_n,x_n,y_n) \to b(s,x,y)$;

(A_4) 随机微分方程

$$X = X_0 + \int_0^{\cdot}\int_{\boldsymbol{R}} a(s,X_s,x)M(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x) + \int_0^{\cdot}\int_{\boldsymbol{R}} b(s,X_s,x)\upsilon(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x) \tag{4.2}$$

有按分布唯一解.

如果 $X_0^n \xrightarrow{\mathscr{L}} X_0$, 则 $X^n \xrightarrow{\mathscr{L}} X$. 其中 X 是方程(4.2)的唯一解.

证明　对任意的 $N > 0$, 取连续函数 f_N 使得在 $|x| \leqslant N$ 上, $f_N(x) = 1$, 在 $|x| > N+1$ 上, $f_N(x) = 0$, 并且 $f(x) \leqslant 1$. 因为 $\upsilon^n \xrightarrow{\mathscr{L}} \upsilon$, 所以由假设可得 $\forall\ t > 0$,

$$\int_0^t\int_{\boldsymbol{R}} f_N(x)\upsilon^n(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x) \xrightarrow{P} \int_0^t\int_{\boldsymbol{R}} f_N(x)\upsilon(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x). \tag{4.3}$$

由 $\upsilon([0,t]\times R) < \infty$ 可推得 $\lim\limits_{N\to\infty}\upsilon([0,t]\times\{|x|>N\}) = 0$, 从而我们有: $\forall\ t > 0, N \to \infty$,

$$\upsilon([0,t]\times R) - \int_0^t\int_R f_N(x)\upsilon(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x) \to 0. \tag{4.4}$$

由条件 (A_2) 我们有: $\forall\ T > 0$,

$$\lim_{N\to\infty}\limsup_{n\to\infty} P^n\left(\sup_{t\leqslant T}\int_0^t\int_R [1 - f_N(x)]\upsilon^n(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x) > \epsilon\right) \leqslant \lim_{n\to\infty}\limsup_{n\to\infty} P^n(\upsilon^n([0,T]\times\{|x|>N\}) > \epsilon) = 0. \tag{4.5}$$

由(4.3)、(4.4)和(4.5)可推得

$$\upsilon^n([0,t]\times\boldsymbol{R}) \xrightarrow{P} \upsilon([0,t]\times\boldsymbol{R}), \quad \forall\ t > 0.$$

令

$$Y^n = \int_0^{\cdot}\int_{\boldsymbol{R}} a_n(s, X^n_{s-}, x) M^n(\mathrm{d}s, \mathrm{d}x),$$

$$Z^n = \int_0^{\cdot}\int_{\boldsymbol{R}} b_n(s, X^n_{s-}, x) \nu^n(\mathrm{d}s, \mathrm{d}x).$$

因为

$$\langle Y^n \rangle_t = \int_0^t\int_{\boldsymbol{R}} a_n^2(s, X^n_{s-}, x)\nu^n(\mathrm{d}s, \mathrm{d}x) \leqslant C^2\nu^n([0,t] \times \boldsymbol{R})$$

及$\{\nu^n([0,t] \times \boldsymbol{R})\}_{n\geqslant 1}$连续胎紧，所以由3.4.3知$\{Y^n\}_{n\geqslant 1}$胎紧. 由于

$$\sup_{s\leqslant N}|\Delta Y^n_s| \leqslant C\sup_{s\leqslant N}|M^n(\{s\} \times R)|,$$

条件(A_2)可推得

$$\lim_{n\to\infty}P^n\left(\sup_{s\leqslant N}|\Delta Y^n_s| > \varepsilon\right) = 0, \quad \forall\, \varepsilon > 0.$$

因此$\{Y^n\}_{n\geqslant 1}$是连续胎紧，故由假设知$\{\overline{X}^n = (X^n_0, Y^n, Z^n)\}_{n\geqslant 1}$是连续胎紧.

令$\overline{X} = (X_0, Y, Z)$是$\{\overline{X}^n\}_{n\geqslant 1}$的一个极限点，则$X = X_0 + Y + Z$当然就是$\{X^n\}_{n\geqslant 1}$的一个极限点. 下面我们要证明$X$的分布是由方程(4.2)所确定的.

设$\{X^{n_k}\}_{k\geqslant 1}$是$\{X^n\}_{n\geqslant 1}$的依分布收敛于$X$的子序列，为了书写方便，我们记$n_k = k$. 由著名的Skorokhod定理，我们可假设按Skorokhod拓扑，

$$(X^n_0, Y^n, Z^n) \longrightarrow (X_0, Y, Z), \ a.s. \tag{4.6}$$

由条件(A_3)和X的连续性，我们可推得对任意的$(s,x) \in \boldsymbol{R}_+ \times \boldsymbol{R}$及任意收敛于$(s,x)$的序列$(s_n, x_n) \in \boldsymbol{R}_+ \times \boldsymbol{R}$,

$$\lim_{n\to\infty} b_n(s_n, X^n_{s_n-}, x_n) = b(s, X_s, x).$$

令$g^n(s,x) = b_n(s, X^n_{s-}, x)$, $g(s,x) = b(s, X_s, x)$, 则对$a.s.\ \omega \in \Omega$, 我们有$g_n \xrightarrow{c.c.} g(\nu\text{-}a.s.)$,因此由引理2.4.2我们可推得按Skorokhod拓扑

$$\int_0^{\cdot}\int_{\boldsymbol{R}} g^n(s,x)\nu^n(\mathrm{d}s, \mathrm{d}x) \longrightarrow \int_0^{\cdot}\int_{\boldsymbol{R}} g(s,x)\nu(\mathrm{d}s, \mathrm{d}x).$$

条件(A_2)和(A_3)可推得

$$\lim_{N\to\infty}\limsup_{n\to\infty}P^n\left(\int_0^t\int_{|x|>N}v_n(x)\upsilon^n(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)>\varepsilon\right)$$
$$=0,\quad\forall\,\varepsilon>0,\,t>0.$$

因为$v_n\xrightarrow{c.c.}v(\upsilon\text{-}a.s.)$，所以由定理 8.3.2 我们有

$$\int_0^\cdot\int_R v_n(x)M^n(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)\xrightarrow{\mathscr{L}}\int_0^\cdot\int_R v(x)M(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x).$$

又因为对任意的$n\geqslant 1$，鞅$\int_0^\cdot\int_R v_n(x)M^n(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)$的跳幅一致有界，所以由定理 4.4.18 知序列$\left\{\int_0^\cdot\int_R v_n(x)M^n(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)\right\}_{n\geqslant 1}$具有性质 UT. 由$\{u,u_n,\ n\geqslant 1\}$满足条件$(L)$利用推论 4.4.26 我们有

$$\int_0^\cdot\int_R a_n(s,X_{s-}^n,x)M^n(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)\longrightarrow\int_0^\cdot\int_R a(s,X_s,x)M(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)$$

按 Skorokhod 拓扑成立.

因此，我们有$Y=\int_0^\cdot\int_R a(s,X_s,x)M(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)$，$Z=\int_0^\cdot\int_R b(s,X_s,x)\upsilon(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)$，所以，

$$X=X_0+\int_0^\cdot\int_R a(s,X_s,x)M(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)$$
$$+\int_0^\cdot\int_R b(s,X_s,x)\upsilon(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x).$$

定理证毕.

8.4.2 定理 设M^n和M均为纯断的R-鞅测度，$\langle M^n\rangle=\upsilon^n$，$\langle M\rangle=\upsilon$，并且$M$是独立增量的. 记$\alpha^n$和$\alpha$分别为$M^n$和$M$的跳测度的可料对偶投影. 假设

(B_1) $\upsilon^n\xrightarrow{\mathscr{L}}\upsilon$，并且

$$\int_0^t\int_R x^2\upsilon(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)<\infty,\ \upsilon(\{t\}\times\boldsymbol{R})=0,\quad\forall\,t>0,$$

(B_2) 存在$\delta>0$，使得对任意的$t>0$，

$$\sup_n E^n \int_0^t \int_R |x|^{2+\delta} \upsilon^n(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x) < \infty.$$

(B_3) 任意的 $t > 0$，$g \in C_0^+(\boldsymbol{R})$，

$$\int_0^t \int_{\mathscr{M}_R(R)} g\left(\int_R x y(\mathrm{d}x)\right) \alpha^n(\mathrm{d}s,\mathrm{d}y)$$

$$\xrightarrow{P} \int_0^t \int_{\mathscr{M}_R(R)} g\left(\int_R x y(\mathrm{d}x)\right) \alpha(\mathrm{d}s,\mathrm{d}y).$$

(B_4) 存在常数 $C > 0$,使得

$$|a_n(s,x,y)| \leqslant C|y|, |b_n(s,x,y)| \leqslant C.$$

存在可测函数$a(s,x,y)$,使得对任意的$(s,x,y) \in \boldsymbol{R}_+ \times \boldsymbol{R}^2$和任意收敛于$(s,x,y)$的序列$(s_n,x_n,y_n)$都有

$$a_n(s_n,x_n,y_n) \to a(s,x,y).$$

假设 $b_n(s,x,y) = u_n(s,x)v_n(y)$，并且存在可测函数 $b(s,x,y) = u(s,x)v(y)$，使得序列 $\{u,u_n,n \geqslant 1\}$ 满足条件(L),$v_n \xrightarrow{c.c.} v(\upsilon\text{-}a.s.)$. 当 $|x| > K$ 时,$|v_n(x)| = 0$,其中 K 为常数.

(B_5) 随机微分方程

$$X = X_0 + \int_0^\cdot \int_R a(s,X_{s-},x)M(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x) + \int_0^\cdot \int_R b(s,X_{s-},x)\upsilon(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x) \tag{4.7}$$

存在按分布的唯一解.

如果$X_0^n \xrightarrow{\mathscr{L}} X_0$,则$X^n \xrightarrow{\mathscr{L}} X$,其中$X$是方程(4.7)的唯一解.

证明　由条件(B_1)和(B_2),容易证明对任意的$t > 0$,

$$\int_0^t \int_R x^2 \upsilon^n(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x) \xrightarrow{P} \int_0^t \int_R x^2 \upsilon(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x) \tag{4.8}$$

以及

$$\upsilon^n([0,t] \times \boldsymbol{R}) \xrightarrow{P} \upsilon([0,t] \times \boldsymbol{R}). \tag{4.9}$$

令

$$Y^n = \int_0^{\cdot}\int_R a_n(s, X_{s-}^n, x) M^n(\mathrm{d}s, \mathrm{d}x),$$

$$Z^n = \int_0^{\cdot}\int_R b_n(s, X_{s-}^n, x) \upsilon^n(\mathrm{d}s, \mathrm{d}x),$$

$$\overline{Y}^n = \int_0^{\cdot}\int_R x M^n(\mathrm{d}s, \mathrm{d}x), \qquad \overline{Z}^n = \int_0^{\cdot}\int_R \upsilon^n(\mathrm{d}s, \mathrm{d}x),$$

则由(4.8)和(4.9)我们知道$\{\langle \overline{Y}^n \rangle\}_{n\geqslant 1}$和$\{\overline{Z}^n\}_{n\geqslant 1}$都是胎紧的. 因为

$$\langle Y^n \rangle_t = \int_0^t\int_R a_n^2(s, X_{s-}^n, x) \upsilon^n(\mathrm{d}s, \mathrm{d}x)$$

$$\leqslant C^2\int_0^t\int_R x^2 \upsilon^n(\mathrm{d}s, \mathrm{d}x) = C^2\langle \overline{Y}^n \rangle_t,$$

$$|Z_t^n - Z_s^n| \leqslant \int_s^t\int_R |b_n(r, X_{r-}^n, x)| \upsilon^n(\mathrm{d}r, \mathrm{d}x) \leqslant C[\overline{Z}_t^n - \overline{Z}_s^n],$$

$$\forall\ 0 \leqslant s \leqslant t,$$

所以$\{Y^n\}_{n\geqslant 1}$、$\{Z^n\}_{n\geqslant 1}$、$\{\overline{Y}^n\}_{n\geqslant 1}$和$\{\overline{Z}^n\}_{n\geqslant 1}$均满足 Aldous 条件. 利用 Lenglart 不等式容易证明

$$\lim_{r\to\infty}\limsup_{n\to\infty} P^n\left(\sup_{s\leqslant N} |(Y_s^n, Z_s^n, \overline{Y}_s^n, \overline{Z}_s^n)| \geqslant r\right) = 0, \quad \forall\ N > 0.$$

因此$\{(Y^n, Z^n, \overline{Y}^n, \overline{Z}^n)\}_{n\geqslant 1}$胎紧. 令$\overline{X} = (X_0, Y, Z, \overline{Y}, \overline{Z})$是$\{\overline{X}^n = (X_0^n, Y^n, Z^n, \overline{Y}^n, \overline{Z}^n)\}_{n\geqslant 1}$的一个极限点, 记$X = X_0 + Y + Z$, 则$X$当然是$\{X^n\}_{n\geqslant 1}$的极限点. 下面我们将证明$X$是方程(4.7)的解.

不失一般性, 我们假设$\overline{X}^n \xrightarrow{\mathscr{L}} \overline{X}$, 由 Skorokhod 定理, 我们可以假设

$$(X_0^n, X^n, Y^n, Z^n, \overline{Y}^n, \overline{Z}^n) \longrightarrow (X_0, X, Y, Z, \overline{Y}, \overline{Z}),\ a.s. \quad (4.10)$$

按 Skorokhod 拓扑成立. (4.9) 表明$\overline{Z} = \int_0^{\cdot}\int_R \upsilon(\mathrm{d}s, \mathrm{d}x)$. 由假设条件$(B_3)$和

$$\langle \overline{Y}^n \rangle_t \xrightarrow{P} \int_0^t\int_R x^2 \upsilon(\mathrm{d}s, \mathrm{d}x), \quad \forall\ t > 0,$$

定理 4.1.5 可推得

$$\overline{Y}^n = \int_0^\cdot \int_R x M^n(\mathrm{d}s, \mathrm{d}x) \xrightarrow{\mathscr{L}} \int_0^\cdot \int_R x M(\mathrm{d}s, \mathrm{d}x) = \overline{Y}. \tag{4.11}$$

对任一满足(4.10)的 $\omega \in \Omega$,存在$[0,\infty)$到$[0,\infty)$上的严格单调的连续函数 $\lambda_t^n = \lambda_t^n(\omega)$ $(n \geqslant 1)$,使得

$$(Y^n \circ \lambda_t^n, \overline{Y}^n \circ \lambda_t^n, X^n \circ \lambda_t^n, \lambda_t^n) \longrightarrow (Y_t, \overline{Y}_t, X_t, t) \tag{4.12}$$

在 $\boldsymbol{R}_+$ 的每个有界区间上一致成立. 设 $0 < s^1 < s^2 < \cdots$ 和 $0 < s_n^1 < s_n^2 < \cdots$ 分别为$\overline{Y}$ 和$\overline{Y}^n \circ \lambda^n$ 的不连续点,并记

$$u^k = \Delta \overline{Y}_{s_k}, \ u_n^k = \Delta \overline{Y}^n \circ \lambda_{s_n^k}^n, \ n, k \geqslant 1,$$

则

$$Y^n \circ \lambda_t^n = \sum_{k, s_n^k \leqslant t} \Delta Y^n \circ \lambda_{s_n^k}^n = \sum_{k, s_n^k \leqslant t} a_n(\lambda_{s_n^k}^n, X^n \circ \lambda_{s_n^k -}^n, u_n^k),$$

$$Y_t = \sum_{k, s^k \leqslant t} a(s^k, X_{s^k -}, u^k),$$

$$\overline{Y}^n \circ \lambda_t^n = \sum_{k, s_n^k \leqslant t} u_n^k,$$

$$\overline{Y}_t = \sum_{k, s^k \leqslant t} u^k,$$

上面两式与(4.12)合并我们可推得当 n 充分大时 $s^k = s_n^k (k \geqslant 1)$,并且有下式成立:

$$u_n^k \to u^k, \ n \to \infty \ (k \geqslant 1), \tag{4.13}$$

所以对于充分大的 n,我们有

$$Y^n \circ \lambda_t^n = \sum_{k, s^k \leqslant t} a_n(\lambda_{s^k}^n, X^n \circ \lambda_{s^k -}^n, u_n^k). \tag{4.14}$$

因为(4.12)中的收敛是在 $\boldsymbol{R}_+$ 的任一有限区间上一致成立,所以,

$$X^n \circ \lambda_{s^k -}^n \longrightarrow X_{s^k -}, \ k \geqslant 1. \tag{4.15}$$

(4.13)和(4.15)可推得

$$(\lambda_{s^k}^n, X^n \circ \lambda_{s^k -}^n, u_n^k) \longrightarrow (s^k, X_{s^k -}, u^k), \ k \geqslant 1.$$

而条件(B_3)可推得在 $\boldsymbol{R}_+$ 的任一有限区间上

$$Y^n \circ \lambda_t^n \longrightarrow \sum_{k:s^k\leqslant t} a(s^k, X_{s^k-}, u^k) = Y_t$$

一致成立. 因此 $Y^n \xrightarrow{\mathscr{L}} Y$.

对任意的 $n \geqslant 1$, 由于 $v_n(y) = 0$, $|y| > k$ 及 $v_n \xrightarrow{c.c.} v(\upsilon\text{-a.s.})$, 所以我们有

$$\int_0^\cdot \int_R^n v_n(y)\upsilon^n(\mathrm{d}s, \mathrm{d}y) \xrightarrow{\mathscr{L}} \int_0^\cdot \int_R v(y)\upsilon(\mathrm{d}s, \mathrm{d}y).$$

从而由条件 (B_1) 和 (B_2) 可推得序列 $\left\{\int_0^\cdot \int_R v_n(y)\upsilon^n(\mathrm{d}s, \mathrm{d}y)\right\}_{n\geqslant 1}$ 满足 Jacod 条件, 因此 $\left\{\int_0^\cdot \int_R v_n(y)\upsilon^n(\mathrm{d}s, \mathrm{d}y)\right\}_{n\geqslant 1}$ 具有性质 UT. 由推论 4.4.26 及 $\{u, u_n, n \geqslant 1\}$ 满足条件 (L), 我们有

$$\int_0^\cdot \int_R u_n(s, X_{s-}^n)v_n(x)\upsilon^n(\mathrm{d}s, \mathrm{d}x)$$

$$\xrightarrow{\mathscr{L}} \int_0^\cdot \int_R u(s, X_{s-}^n)v(x)\upsilon(\mathrm{d}s, \mathrm{d}x),$$

即

$$Z^n \xrightarrow{\mathscr{L}} Z = \int_0^\cdot \int_R b(s, X_{s-}, x)\upsilon(\mathrm{d}s, \mathrm{d}x).$$

定理证毕.

8.4.3 注 如果我们把 $\int_0^\cdot c_n(s, X_{s-}^n)\mathrm{d}A_s^n$ 加到方程(4.1)上, 即考虑随机微分方程

$$X^n = X_0^n + \int_0^\cdot \int_R a^n(s, X_{s-}^n, x)M^n(\mathrm{d}s, \mathrm{d}x)$$

$$+ \int_0^\cdot \int_R b_n(s, X_{s-}^n, x)\upsilon^n(\mathrm{d}s, \mathrm{d}x) + \int_0^\cdot c_n(s, X_{s-}^n)\mathrm{d}A_s^n,$$

其中 A^n 是有限变差过程, 并且假设

(Ⅰ) 对任意的 $t \geqslant 0$, $A_t^n \xrightarrow{P} A_t$, 其中 A 是单调不降的连续函数, $A_0 = 0$;

(Ⅱ) 对任意的 $(s, x) \in \boldsymbol{R}_+ \times \boldsymbol{R}$ 及任一收敛于 (s, x) 的序列

$(s_n, x_n) \in \boldsymbol{R}_+ \times \boldsymbol{R}, (n \geqslant 1)$，我们有 $c_n(s_n, x_n) \to c(s, x)$.

如果我们把$\int_0^{\cdot} c(s, X_s) \mathrm{d}A_s$ 和 $\int_0^{\cdot}\int_{\boldsymbol{R}} c(s, X_{s-}) \mathrm{d}A_s$ 分别加到方程(4.2)和(4.7)上，则定理 8.4.1 和定理 8.4.2 中的结论仍然成立.

因为证明的方法类似，所以此处略去证明.

下面我们给出定理 8.4.2 的一个应用，考虑一个贮存过程的极限问题.

设 Z 是满足下述方程的实值贮存过程

$$Z_t = Z_0 - \int_0^t r(Z_s) \mathrm{d}s + \int_0^{\cdot}\int_{(0,\infty)} f(Z_{s-}, x) N(\mathrm{d}s, \mathrm{d}x),$$

其中 $N(\mathrm{d}s, \mathrm{d}x)$ 是取正值的 Poisson 点过程的计数测度，即 $N(\mathrm{d}s, \mathrm{d}x)$ 为 Poisson 过程的跳测度，并且与 $Z_0 \geqslant 0$ 独立. N 的可料对偶投影为 $\hat{N}(\mathrm{d}s, \mathrm{d}x) = \mathrm{d}s\mathrm{d}\upsilon(x)$. 假设下列条件成立：

(C_1) $r(\cdot): [0, \infty) \to [0, \infty)$ 在 $(0, \infty)$ 上连续，$r(0) = 0$，并且 $\bar{r} = \lim\limits_{x \to \infty} r(x) < \infty$.

(C_2) f 是 $\boldsymbol{R}_+^2$ 上的非负可测函数，使得对任意的 $u > 0$，$\lim\limits_{x \to \infty} f(x, u) = g(u)$ 存在，并且 $g(u)$ 是单调递增的连续函数，满足 $\lim\limits_{u \to \infty} g(u) = \infty$，记 $g^{-1}(u) = \inf\{y: g(y) \geqslant u\}$，则

$$\lim_{\substack{u \to \infty \\ x \to \infty}} \frac{f(x, g^{-1}(u))}{u} = 1,$$

并且存在常数 $K > 0$，使得对任意的 $x > 0$, $u > 0$, $f(x, g^{-1}(u)) \leqslant Ku$.

(C_3) 存在两个正序列$\{\alpha_n\}_{n \geqslant 1}$ 和 $\{\beta_n\}_{n \geqslant 1}$ 满足条件 $\alpha_n \to \infty, \beta_n \to \infty$，并且 $\alpha_n / \beta_n \to 1$，使得

$$\alpha_n \upsilon(\mathrm{d}g^{-1}(\beta_n x)) \xrightarrow{\mathscr{L}} \upsilon_0(\mathrm{d}x).$$

存在 $\delta > 0$，使得

$$\int_{(0,\infty)} x^2 \upsilon_0(\mathrm{d}x) < \infty, \quad \int_0^{\infty} g^{2+\delta}(x) \upsilon(\mathrm{d}x) < \infty.$$

8.4.4 性质 定义

$$h(x)=\int_0^\infty f(x,u)\upsilon(\mathrm{d}u)-r(x),$$

$$u=\int_0^\infty g(u)\upsilon(\mathrm{d}u)-\bar{r},$$

并且假设$\inf\limits_x h(x)>0$以及

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t^{\frac{1}{2}}}\int_0^t[h(x)-u]\mathrm{d}x=d<\infty.$$

记$X^n=\frac{1}{\beta_n}[Z_{\alpha_n t}-\alpha_n ut]$,则在条件$(C_1)$、$(C_2)$和$(C_3)$下,我们有$X^n\xrightarrow{\mathscr{L}}X$,其中

$$X_t=\int_0^t\int_0^\infty x\,\widetilde{N}_0(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)+t^{\frac{1}{2}}d,$$

N_0是可料对偶投影为$\hat{N}_0(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)=\mathrm{d}s\upsilon_0(\mathrm{d}x)$的Poisson点过程的跳测度,$\widetilde{N}_0=N_0-\hat{N}_0$.

证明 容易证明

$$X_t^n=\frac{1}{\beta_n}Z_0+\frac{1}{\beta_n}\int_0^{\alpha_n t}[h(Z_s)-u]\mathrm{d}s+\int_0^t\int_0^\infty\frac{1}{\beta_n}f(\beta_n X_{s-}^n+\alpha_n us,$$
$$g^{-1}(\beta_n x))\,\widetilde{N}\,(\alpha_n\mathrm{d}s,\mathrm{d}g^{-1}(\beta_n x)).$$

令

$$M^n(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)=\widetilde{N}\,(\alpha_n\mathrm{d}s,\mathrm{d}g^{-1}(\beta_n x)),$$

$$M(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)=\widetilde{N}_0(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x),$$

$$c_n(s,x)=1,\ A_t^n=\frac{1}{\beta_n}\int_0^{\alpha_n t}[h(Z_s)-u]\mathrm{d}s,$$

$$a_n(s,x,y)=\frac{1}{\beta_n}f(\beta_n x+\alpha_n us,g^{-1}(\beta_n y)),$$

$$c(s,x)=1,\ A_t=t^{\frac{1}{2}}d,\ a(s,x,y)=y.$$

因为$\langle M^n\rangle=\upsilon^n$, $\upsilon^n(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)=\alpha_n\upsilon(dg^{-1}(\beta_n x))\mathrm{d}s$, $\langle M\rangle=\bar{\upsilon}$, $\bar{\upsilon}(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)=\mathrm{d}s\upsilon_0(\mathrm{d}x)$,所以由条件$(C_3)$,我们有$\upsilon^n\xrightarrow{\mathscr{L}}\bar{\upsilon}$,并且

$$\int_0^t\int_R x^2\,\upsilon(ds,dx)=\int_0^t\int_0^\infty x^2\upsilon_0(dx)ds<\infty,\quad\forall\ t>0.$$

又由

$$\begin{aligned}&E^n\int_0^t\int_R|x|^{2+\delta}\upsilon^n(ds,dx)\\&=E^n\int_0^t\int_0^\infty x^{2+\delta}\upsilon(dg^{-1}(\beta_n x))ds\\&=\frac{\alpha_n t}{\beta_n^{2+\delta}}\int_0^\infty g^{2+\delta}(y)\upsilon(dy)<\infty,\quad\forall\ t>0,\end{aligned}$$

从而我们知道条件(B_1)和(B_2)成立.

因为对任意的$(s,x,y)\neq 0$及任一收敛于(s,x,y)的序列$(s_n,x_n,y_n)\in R^3$,

$$\beta_n x_n+\alpha_n us_n=\alpha_n\left(\frac{\beta_n}{\alpha_n}x_n+us_n\right)\to\infty,$$

所以

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}a_n(s_n,x_n,y_n)&=\lim_{n\to\infty}\frac{y}{\beta_n y}f(\beta_n x+\alpha_n us_n,g^{-1}(\beta_n y))\\&=y=a(s,x,y).\end{aligned}$$

即(B_4)成立.

因为$\hat{N}^n\xrightarrow{\mathscr{L}}\hat{N}_0$,所以由定理5.1.9知$N^n\xrightarrow{\mathscr{L}}N_0$. 由条件$(C_3)$可推得

$$\int_0^\cdot\int_0^\infty xN^n(ds,dx)\xrightarrow{\mathscr{L}}\int_0^\cdot\int_0^\infty xN_0(ds,dx).$$

从而对任意的$g\in C_0^+(R)$,

$$\begin{aligned}V^n&=\sum_{s\leqslant\cdot}g\left(\int_0^\infty xN^n(\{s\}\times dx)\right)\\&\xrightarrow{\mathscr{L}}\sum_{s\leqslant\cdot}g\left(\int_0^\infty xN_0(\{s\}\times dx)\right)=V.\end{aligned}$$

由于V^n和V都是增过程,且V没有固定不连续点,因此,

$$\sup_{s\leqslant t}|(V_s^n)^p-V_s^p|\longrightarrow 0,\quad\forall\ t>0.$$

但是，

$$(V^n)^p = \int_0^{\cdot}\int_{\mathscr{M}_R((0,\infty))} g\left(\int_0^{\infty} xy(\mathrm{d}x)\right)\alpha^n(\mathrm{d}s,\mathrm{d}y),$$

$$V^p = \int_0^{\cdot}\int_{\mathscr{M}_R((0,\infty))} g\left(\int_0^{\infty} xy(\mathrm{d}x)\right)\alpha(\mathrm{d}s,\mathrm{d}y),$$

其中α^n和α分别为M^n和M的跳测度的可料对偶投影，故条件(B_3)成立.(B_5)成立是显然的，因此由定理8.4.2及注8.4.3知本命题成立. 证毕.

9

Hilbert 空间值鞅测度的极限定理

前面我们已经研究了 Hilbert 空间值半鞅的极限定理和 Hilbert 空间值鞅测度的性质. 类似于实值鞅测度的研究，本章研究 Hilbert 空间值鞅测度的极限定理. 本章取材于[40].

9.1 定义和基本性质

9.1.1 定义 设$(\Omega^n,\mathscr{F}^n,\mathscr{F}_t^n,P^n)$和$(\Omega,\mathscr{F},\mathscr{F}_t,P)$均为带流的概率空间，$(\mathscr{F}_t^n)_{t\geq 0}$和$(\mathscr{F}_t)_{t\geq 0}$满足"通常条件"，$M^n$和$M$均为具有可数基局部紧的 Hausdorff 空间$\boldsymbol{S}$上的$\boldsymbol{H}$-值鞅测度，称$M^n$依分布弱收敛于$M$，并记为$M^n \xrightarrow{L} M$，如果对任意的$f \in C_b(\boldsymbol{R}_+ \times \boldsymbol{S})$，

$$\int_0^\cdot\int_S f(s,x)M^n(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x) \xrightarrow{\mathscr{L}} \int_0^\cdot\int_S f(s,x)M(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x). \tag{1.1}$$

鞅测度序列弱收敛的定义是随机测度弱收敛和$\boldsymbol{H}$-值鞅的弱

收敛的有机结合.

类似于定理 8.1.5 的证明,我们有如下定理:

9.1.2 定理 设 M^n 和 M 均为可积的正交鞅测度,$\langle M^n\rangle = \upsilon^n$,$\langle M\rangle = \upsilon$.

(Ⅰ)假设

$$\lim_{a\to\infty}\limsup_{n\to\infty} P^n(\upsilon^n([0,N]\times S)) > a) = 0, \forall\ N > 0, \quad (1.2)$$

并且对 $R_+ \times S$ 的任意两两互不相交的 υ- 连续集列 $\{A_1,\cdots,A_k\}$,我们有 H^k- 值鞅

$$\left(\int_0^{\cdot}\int_S I_{A_1}(s,x)M^n(ds,dx),\cdots,\int_0^{\cdot}\int_S I_{A_k}(s,x)M^n(ds,dx)\right)\xrightarrow{\mathscr{L}}$$

$$\left(\int_0^{\cdot}\int_S I_{A_1}(s,x)M(ds,dx),\cdots,\int_0^{\cdot}\int_S I_{A_k}(s,x)M(ds,dx)\right), \quad (1.3)$$

则 $M^n \xrightarrow{L} M$.

(Ⅱ)假设 $M^n \xrightarrow{L} M$. 设 $\{A_m\}_{m\geq 1}$ 是 υ- 连续的任意闭集列,且满足

$$\lim_{m\to\infty} P(\upsilon(A_m) > \varepsilon) = 0, \forall\ \varepsilon > 0. \quad (1.4)$$

如果

$$\lim_{m\to\infty}\limsup_{n\to\infty} P^n(\upsilon^n(A_m) > \varepsilon) = 0, \forall\ \varepsilon > 0, \quad (1.5)$$

则对任意 υ- 连续值 A,我们有

$$\int_0^{\cdot}\int_S I_A(s,x)M^n(ds,dx) \xrightarrow{\mathscr{L}} \int_0^{\cdot}\int_S I_A(s,x)M(ds,dx). \quad (1.6)$$

由此定理我们可得下述推论.

9.1.3 推论 设 M^n 和 M 都是独立增量的可积正交 H- 值鞅测度,M 连续. 如果(1.2)、(1.4) 和(1.5) 成立,则 $M^n \xrightarrow{L} M$ 的充要条件是对任一 υ- 连续集 A,(1.6) 成立.

证明 同推论 8.1.6 的证明类似,故略去.

对于局部可积的 H- 值鞅测度的极限定义,只要把定义 9.1.1

中的 $f \in C_b(\boldsymbol{R}_+ \times \boldsymbol{S})$ 换为 $f \in C_K(\boldsymbol{R} \times \boldsymbol{S})$ 即可. 如果将定理9.1.2及推论 9.1.3 中的 υ- 连续集列都限制在紧子集内,则对于局部可积鞅序列,定理 9.1.2 及推论 9.1.3 仍然成立. 有兴趣的读者可作为练习.

9.2 H-值鞅测度序列到独立增量鞅测度的收敛

本节是在满足 7.2 的假设,即假设 $\boldsymbol{H}$-值鞅测度的跳测度的可料对偶投影存在的条件下,讨论鞅测度序列的弱极限.

9.2.1 定理 设 M^n 和 M 均为可积的 $\boldsymbol{H}$-值鞅测度,$\langle\langle M^n \rangle\rangle = \upsilon^n$,$\langle\langle M \rangle\rangle = \upsilon$,$\beta^n$ 和 β 分别是 M^n 和 M 的跳测度的可料对偶投影,M 是没有固定不连续点正交的独立增量鞅测度.

如果对任意的 $t > 0, \delta > 0$ 及 $f \in C_b(\boldsymbol{R}_+ \times \boldsymbol{S})$,

$$\lim_{a \to \infty} \limsup_{n \to \infty} P^n\Big(\int_0^t \int_{\mathscr{M}(S)} \Big\| \int_S f(s,x) y(\mathrm{d}x) \Big\|^2 \cdot I_{\{ \| \int_S f(s,x)y(\mathrm{d}x) \| > a \}} \beta^n(\mathrm{d}s, \mathrm{d}y) > \delta \Big) = 0, \tag{2.1}$$

则在下列条件成立的条件下,我们有 $M^n \xrightarrow{L} M$.

(Ⅰ) $\upsilon^n \xrightarrow{\mathscr{L}} \upsilon$;

(Ⅱ) 对任意的 $f \in C_b(\boldsymbol{R}_+ \times \boldsymbol{S}), g \in C_0^+(\boldsymbol{H}), t > 0$

$$\int_0^t \int_{\mathscr{M}(S)} g\Big(\int_S f(s,x) y(\mathrm{d}x) \Big) \beta^n(\mathrm{d}s, \mathrm{d}y) \xrightarrow{P} \int_0^t \int_{\mathscr{M}(S)} g\Big(\int_S f(s,x) y(\mathrm{d}x) \Big) \beta(\mathrm{d}s, \mathrm{d}y).$$

证明 因为 M 是独立增量的正交鞅测度,所以由定理 7.4.2 知 υ 和 β 均为非随机. 对于 $f \in C_b(\boldsymbol{R}_+ \times \boldsymbol{S})$,定义

$$X^n = \int_0^t \int_S f(s,x) M^n(\mathrm{d}s, \mathrm{d}x), \quad X = \int_0^t \int_S f(s,x) M(\mathrm{d}s, \mathrm{d}x),$$

则 X^n 和 X 均为 $\boldsymbol{H}$-值平方可积鞅，并且 X 是没有固定不连续点的独立增量过程. 设 λ^n 和 λ 分别是 X^n 和 X 的跳测度的可料对偶投影，由假设条件(Ⅰ)及 7.2 的(2.3)，我们有

$$g.\lambda_t^n \xrightarrow{P} g.\lambda_t, \quad \forall\, t > 0,\ g \in C_0^{\dagger}(H). \tag{2.2}$$

由条件(Ⅰ)可推得

$$\langle\!\langle X^n \rangle\!\rangle = \int_0^t \int_S f^2(s,x)\, \upsilon^n(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x) \xrightarrow{\mathscr{L}} \int_0^t \int_S f^2(s,x)\, \upsilon(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x) = \langle\!\langle X \rangle\!\rangle. \tag{2.3}$$

(2.1) 意为 X^n 满足

$$\lim_{a\to\infty} \limsup_{n\to\infty} P^n(\|x\|^2 I_{\{\|x\|>a\}}.\lambda_t^n > \eta) = 0, \quad \forall\, t > 0, \eta > 0. \tag{2.4}$$

由(2.2)、(2.3)和(2.4)，利用定理 4.2.7 我们有 $X^n \xrightarrow{\mathscr{L}} X$，由 $f \in C_b(\boldsymbol{R}_+ \times S)$ 的任意性知 $M^n \xrightarrow{L} M$. 证毕.

9.2.2 推论 假设 M^n、M 和定理 9.2.1 相同，并且 M 连续. 如果下列条件成立：

(Ⅰ) $\upsilon^n \xrightarrow{\mathscr{L}} \upsilon$;

(Ⅱ) 对任意的 $\varepsilon > 0, N > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} P^n(\sup_{s\leqslant N} |M^n(\{s\} \times \boldsymbol{S})| > \varepsilon) = 0, \tag{2.5}$$

其中 $|M^n(\{s\} \times \boldsymbol{S})|$ 表示 $\boldsymbol{H}$-值随机测度 $M^n(\{s\} \times \mathrm{d}x)$ 在 $\boldsymbol{S}$ 上的全变差，则 $M^n \xrightarrow{L} M$.

证明 按照定理 9.2.1，我们只要证明 9.2.1(Ⅱ)成立. 对 $f \in C_b(\boldsymbol{R}_+ \times \boldsymbol{S})$，定义 X^n、X 和 λ^n 与定理 9.2.1 的证明中相同，由 M 的连续性知 X 是连续的. 对任意的 $g \in C_0^+(\boldsymbol{H})$，则存在常数 a 及 C，使得

$$g.\lambda_t^n \leqslant C I_{\{\|x\|>a\}}.\lambda_t^n = C\lambda^n([0,t] \times \{\|x\| > a\}). \tag{2.6}$$

由引理 3.4.6 我们知道$\lim\limits_{n\to\infty}P^n(\sup\limits_{s\leqslant N}\|\Delta X_s^n\|>a)=0$等价于

$$\lim_{n\to\infty}P^n(\lambda^n([0,N]\times\{\|x\|>a\})>\epsilon)=0,\quad \forall\,\epsilon>0. \tag{2.7}$$

又

$$P^n\Big(\sup_{s\leqslant N}\|\Delta X_s^n\|>a\Big)\leqslant P^n\Big(\sup_{s\leqslant N}C_1|M^n(\{s\}\times \boldsymbol{S})|>a\Big), \tag{2.8}$$

其中 $|f|\leqslant C_1$，故由(2.6)、(2.7) 和(2.8)，我们有 $g.\lambda_t^n\xrightarrow{P}0,\forall\, t\geqslant 0$，即 9.2.1(Ⅱ)成立. 证毕.

下面我们再讨论独立增量鞅测度序列的极限定理.

9.2.3 定理 设 M^n 和 M 均为可积的强正交独立增量鞅测度，并且 M 没有固定不连续点，《M^n》$=\upsilon^n$，《M》$=\upsilon$，β^n 和 β 分别为 M^n 和 M 的跳测度的可料对偶投影. 如果对任意的 $t>0$ 和任意的 $f\in C_b(\boldsymbol{R}_+\times \boldsymbol{S})$，

$$\lim_{a\to\infty}\limsup_{n\to\infty}\int_0^t\int_{\mathscr{M}(S)}\Big\|\int_S f(s,x)y(\mathrm{d}x)\Big\|^2 \cdot I_{\{\|\int_S f(s,x)y(\mathrm{d}x)\|>a\}}\beta^n(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)=0, \tag{2.9}$$

则在下列条件成立的条件下，我们有 $M^n\xrightarrow{\mathscr{L}}M$.

(Ⅰ) $\upsilon^n\xrightarrow{\mathscr{L}}\upsilon$;

(Ⅱ) 对任意的 $t>0$、$g\in C_0^+(\boldsymbol{H})$ 和 $f\in C_b(\boldsymbol{R}_+\times \boldsymbol{S})$，

$$\int_0^t\int_{\mathscr{M}(S)}g\Big(\int_S f(s,x)y(\mathrm{d}x)\Big)\beta^n(\mathrm{d}s,\mathrm{d}y)\longrightarrow\int_0^t\int_{\mathscr{M}(S)}g\Big(\int_S f(s,x)y(\mathrm{d}x)\Big)\beta(\mathrm{d}s,\mathrm{d}y).$$

证明　只要用定理 4.2.2 代替定理 4.2.7，和定理 9.2.1 的证明完全相同，我们可知此定理成立. 证毕.

9.2.4 定理 假设 M^n、M 和定理 9.2.3 中的相同，如果存在常数 $b>0$，使得

$$|M^n(\{s\} \times \boldsymbol{S})| \leqslant b, \quad \forall s > 0, \quad n \geqslant 1, \tag{2.10}$$

并且

$$\sup_n \mathrm{Var}(\nu^n([0,t] \times \boldsymbol{S})) < \infty, \quad \forall t > 0, \tag{2.11}$$

则 $M^n \xrightarrow{L} M$ 的充要条件是条件 9.2.3(Ⅰ)、(Ⅱ)成立.

证明　由定理 9.2.3 知充分性成立.因此我们只要证明必要性.假设 $M^n \xrightarrow{L} M_0$,对任意的 $f \in C_b(\boldsymbol{R}_+ \times \boldsymbol{S})$,令

$$X^n = \int_0^\cdot \int_S f(s,x) M^n(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x), \; X = \int_0^\cdot \int_S f(s,x) M(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x),$$

则 X^n 和 X 均为 $\boldsymbol{H}$-值独立增量的平方可积鞅,并且 X 没有固定不连续点.由(2.10)知存在常数 $a > 0$,使得 $\|\Delta X^n\| \leqslant a$ 对每个 $n \geqslant 1$ 成立.而(2.11)可推得对任意的 $t > 0$,$\sup_n \mathrm{Var}(\langle\!\langle X^n \rangle\!\rangle_t) < \infty$.

因此由定理 4.2.6 知

(a) $\langle\!\langle X^n \rangle\!\rangle \to \langle\!\langle X \rangle\!\rangle$ 按 $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{H} \hat{\otimes}_1 \boldsymbol{H})$ 中的 Skorokhod 拓扑成立;

(b) $g.\lambda_t^n \to g.\lambda_t, \quad \forall t > 0, \; g \in C_0^+(\boldsymbol{H})$,

其中 λ^n 和 λ 分别为 X^n 和 X 的跳测度的可料对偶投影.

(a) 表明

$$\int_0^\cdot \int_S f^2(s,x)\, \nu^n(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x) \xrightarrow{s.k.} \int_0^\cdot \int_S f^2(s,x)\, \nu(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x), \tag{2.12}$$

因此对 $0 \leqslant f \in C_b(\boldsymbol{R}_+ \times \boldsymbol{S})$,我们有

$$\int_0^\cdot \int_S f(s,x)\, \nu^n(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x) \xrightarrow{s.k.} \int_0^\cdot \int_S f(s,x)\, \nu(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x). \tag{2.13}$$

对一般的 $f \in C_b(\boldsymbol{R}_+ \times \boldsymbol{S})$,我们分别对 f^+ 和 f^- 利用(2.13),并注意到 ν 随机连续即得(2.13)对一切 f 成立.从而有 $\nu^n \xrightarrow{\mathscr{L}} \nu$,即 9.2.3(Ⅰ)成立.由(b)及 7.2 中的(2.3)式可得

$$\int_0^t \int_{\mathscr{M}(S)} g\left(\int_S f(s,x) y(\mathrm{d}x)\right) \beta^n(\mathrm{d}s,\mathrm{d}y)$$

$$\longrightarrow \int_0^t \int_{\mathscr{M}(S)} g\left(\int_S f(s,x) y(\mathrm{d}x)\right) \beta(\mathrm{d}s,\mathrm{d}y).$$

由 f 及 g 的任意性可知 9.2.3(Ⅱ) 成立. 证毕.

9.2.5 推论 假设 M^n、M 和定理 9.2.4 中的相同, 并且 M 连续. 假设存在常数 $b>0$, 使得(2.10) 成立. 如果(2.11) 成立, 则 $M^n \xrightarrow{L} M$ 的充要条件是

(Ⅰ) $v^n \xrightarrow{\mathscr{L}} v$;

(Ⅱ) $\forall\, t>0, a>0$ 及 $f \in C_b(\boldsymbol{R}_+ \times \boldsymbol{S})$,

$$\lambda_f^n([0,t] \times \{\|x\| > a\}) \to 0,$$

其中 λ_f^n 是平方可积鞅 $\int_0^{\cdot}\int_S f(s,x)M^n(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)$ 的跳测度的可料对偶投影.

证明　和推论 9.2.2 及定理 9.2.4 的证明类似, 故略去.

对局部可积鞅测度我们有类似的结论成立, 在此就不再重述.

参 考 文 献

[1] F. Avram, Weak convergence of the variations, iterated integrals and Doléans-Dade expronentials of sequences of semimartingales, Ann. Probab. 16(1988) 246～250.

[2] H. Bergström, Weak convergence of measures, Academic Press, New York (1982).

[3] P. Billingsley, Convergence of probability measures, John Wiley & Sons, Inc. New York (1968).

[4] R. W. R. Darling, Approximating Itô integrals of differential forms and geodesic deviation, Z. W. Verw. Gebiete 65 (1984) 563～572.

[5] C. Dellacherie and P. A. Meyer, Probabilities and Potential B, Theory of Martingales, North-Holland Publishing Company-Amsterdam New York Oxford (1982).

[6] J. Diestel and J. J. Jr Uhl, Vector Measures, Providence, American Math. Society (1977).

[7] D. Duffie, Security Markers, Stochastic Models, Academic Press Boston (1988).

[8] D. Duffie and P. Protter, From discrete to continuous time finance, weak convergence of the financial gain processes (1988).

[9] N. El Karoui and S. Méléard, Martingale measures and stochastic calculus, Probab. Th. Rel. Fields 84 (1990) 83～101.

[10] S. N. Ethier and H. G. Kurtz, Markov Processes, Characterization and Convergence, John Wiley & Sons, Inc. New York (1986).

[11] 龚光鲁,随机微分方程引论,北京大学出版社 (1987).

[12] S. W. He and J. G. Wang, Two results on jump processes, Sem. Probab. XVIII, Lect. Notes in Math. 1059, Springer Verlag (1984) 256-267.

[13] S. W. He and J. G. Wang and J. A. Yan, Semimartingale Theory

and Stochastic Calculus, Science Press, Beijing New York ,CRC Press, Inc. Boca Raton Ann. Arbor London Tokyo (1992).

[14] N. Ikeda and S. Watanabe, Stochastic differential equations and diffusions processes, North-Holland Math. Library (1981).

[15] J. Jacod and J. Mèmin, Weak and strong solutions of stochastic equations existence and stability, In: Proc. Durham Symp. (1980) (Lect. Notes in Math. 851), Berlin Heidelberg New York, Springer-Verlag (1981).

[16] J. Jacod and A. N. Shiryaev, Limit Theorems for Stochastic Processes, New York, Springer-Verlag (1987).

[17] A. Jakubowsik and J. Mémin and G. Pages, Convergence en loi des suites d'integrales stochastiques sur l'espace D^1 de Skorokhod, Probab. Th. Rel. Fields, 81 (1989) 111~137.

[18] A. Joffe and M. Mětivier, Weak convergence of sequence of semimartingales with applications to multitype braching processes, Adv. Appl. Probab. 18 (1986) 20~65.

[19] O. Kallenberg, Random Measures, Akademic-Verlag, Berlin (1983).

[20] O. Kallenberg and R. Sztencel, Some dimension-free features of vector-valued martingales, Probab. Th. Rel. Fields 88 (1991)215~247.

[21] Y. Kasahara and S. Watanabe, Limit theorems for point processes and their functionals, J. Math. Soc. Japan 38 (1986) 543~574.

[22] Y. Kasahara and Y. Yamada, Stability theorem for stochastic differential equations with jumps ,Stochastic Processes App. 38 (1991) 13~32.

[23] V. Mackevicius, S^p stabilite des solutions d'equations differentielles stochastiques avec semimartingales directrices discontinues, C. R. Acad. Sc. Paris 302, Serie I, 19 (1986) 689~692.

[24] J. Mémin and L. Slominski, Condition UT end stabilité en loi des solutions d'équations differentielles stochastiques, Lect. Notes in Math. 1485, New York, Springer-Verlag (1991) 162~177.

[25] M. Mètivier, Semimartingales, a course on stochastic processes, De Gruyter, Berlin New York (1982).

[26] M. Mètivier, Stochastic integrations with respect to Hilbert valued martingales, representation theorem and infinite dimensional filtering, Lect. Notes in Math. 695, New York, Spring-Verlag (1978) 13～25.

[27] M. Mètivier and S. Nakao, Equivalent condition for the tightness of a sequence of continuous Hilbert valued martingales, Nagoga Math. J. 106 (1987) 113～119.

[28] M. Mètivier and G. Pistone, Une formule d'isométrie pour l'intégrale stochastique hilbertienne et équations d'évolution linéaires stochastiques, Z. W. Verw Gebiete 33 (1975) 1～18.

[29] P. A. Meyer and W. A. Zheng, Tightness criteria for laws of semimartingales, Ann. Inc. Henri Poincaré (Probab. Stat.) 20 (1984) 353～372.

[30] J. Y. Ouvrard, Représentation de martingales vectorielles de carrè intégrable à valeurs dans des espaces de Hilbert réels séparables, Z. W. Verw Gebiete 33 (1975) 197～208.

[31] P. Protter, Stochastic integration and differential equations, Springer-Verlag Berlin Heidelberg (1990).

[32] Yu. V. Prokhorov, Convergence of stochastic processes and limit theorems in probability theory, Theory Probab. Appl. 1(1956) 157～214.

[33] A. V. Skorokhod, Limit theorems for stochastic processes, Theory Probab. Appl. 1(1956) 261～290.

[34] L. Slominski, Approximation of predictable characteristics of processes with filtration, Lect. Notes in Math. 1247 (1987) 447～478.

[35] L. Slominski, Stability of strong solutions of stochastic differential equations, Stochastic Processes Appl. 31 (1989) 173～202.

[36] D. W. Stroock and R. S. Varadhan, Multidimensional diffusion processes, Springer-Verlag Berlin (1979).

[37] D. H. Thang, On the convergence of vector random measures, Probab. Th. Rel. Fields, 88 (1991) 1～16.

[38] J.B. Walsh, An introductions to stochastic partial differential equations, Lect. Notes in Math. 1180, Springer-Verlag New York (1986) 269～439.

[39] Y.C. Xie, Hilbert valued martingale measures and stochastic integral《南京大学学报数学半年刊》Vol. 12,No. 1(1995)65～76.

[40] Y.C. Xie, Limit theorems of Hilbert-valued semimartingals and Hilbert-valued martingale measures, Stochastic Processes Appl. 59(1995).

[41] Y.C. Xie, Stability theorems for stochastic differential equations with respect to martingale measures《南京大学学报数学半年刊》Vol. 12, No. 2(1995).

[42] Y.C. Xie, Tightness of Hilbert valued semimartingales. 华东师范大学博士学位论文(1992).

[43] Y.C. Xie, Vague convergence of locally integrable martingale measures, Stochastic Processes Appl. 52(1994)211～227.

[44] Y.C. Xie, Weak convergence of a sequence of Markov chains to a diffusion process, Northeastern Math. J. 8 (1992) 38～45.

[45] Y.C. Xie, Weak convergence of integrable martingale measures 待发表.

[46] 谢颖超,随机测度序列的弱收敛,《华东师范大学学报》4(1993) 1～5.

[47] 谢颖超,非时齐跳跃 Markov 过程序列到扩散过程的弱收敛,《徐州师范学院学报》3 (1992) 1～6.

[48] 谢颖超,跳跃 Markov 过程序列到扩散过程的弱收敛,《数学年刊》(A 辑) (1993) 246～254.

[49] 谢颖超,H-值鞅的可料表示性,《徐州师范学院学报》3(1993)12～16.

[50] 谢颖超、陈彬,有限维半鞅序列的 UT 性及随机积分序列的弱收敛,《徐州师范学院学报》4 (1991) 6～12.

[51] K. Yamada, Limit theorems for jump Skock models, J. Appl. Probab. 27 (1989) 793～806.

[52] K. Yamada, Weak convergence of a sequence of non-negative

pure Markov jump processes to Bessel diffusions, Tensor N. S. 45 (1987) 51～63.

[53] 严加安,测度与积分,陕西师范大学出版社 (1988).

[54] 严加安,鞅与随机积分引论,上海科学技术出版社 (1981).

索　　引

二至四画

五　　画

七 画

八 画

九　画

十至十三画

十　四　画

其　它

符　号